Programme du GT Variétés abéliennes, courbes hyperelliptiques et de Shimura.

version du 20/11/2014

1 Variétés abéliennes

Pour un tore complexe $X = V/\Lambda$, explication :

1. — de l'isomorphisme entre le groupe de Néron-Séveri de X, et certaines formes bilinéaires alternées sur V entières sur Λ ;
   — d'une version explicite (au choix) de la flèche première classe de Chern $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z})$;
2. du théorème d'Appel-Humbert ;
3. des conditions de Riemann.
4. (Et, idéalement, de la correspondance entre sous-variétés abéliennes de X et idempotents symétriques de $End_{\mathbf{Q}}(X)$).

Références : par exemple [B-L], [G-H], [Deb], mais d'autres approches sont possibles.

2 Algèbres de quaternions

1. automorphismes, description explicite comme composition de deux corps quadratiques plongés ;
2. scindage, discriminant et plongements de corps quadratiques ;
3. ordres : théorie locale ;
4. ordres : théorie globale.

Références : par exemple [Vig] ou [Rei]

3 Courbes de Shimura $X = \mathcal{H}/\mathcal{O}^1$

Avec une algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}$ et un ordre maximal $\mathcal{O}$:

— Description comme quotient compact du demi plan supérieur $\mathcal{H}$ ([Kat], §5.4).

— Description comme ensemble de classes d'isomorphismes de certaines surfaces abéliennes polarisées ([Lang], chap. IX).

M. Rambaud

4 Points à multiplication complexe, sur $\mathbf{C}$

Soit z un point de la courbe de Shimura $X = \mathcal{H}/\mathcal{O}^1$, représenté par un point z du demi plan supérieur, et A la variété abélienne sur laquelle il s'envoie. Description de l'équivalence entre

1. A isogène à $E \times E$;
2. L'anneau des endomorphismes de A compatibles avec la multiplication quaternionique, n'est pas réduit à $\mathbf{Z}$ (mais de la forme $\mathbf{Z}[g]$, g quadratique) ;
3. z est fixé par un ordre $\mathbf{Z}[g]$, d'un corps quadratique $\mathbf{Q}(g)$, (optimalement) plongé dans $\mathcal{O}$.

(Et, idéalement, décrire les involutions d'Atkin-Lehner. Puis décrire une bijection entre : les points (CM) fixés par une involution d'Atkin Lehner, et les plongements optimaux, dans l'algèbre de quaternions, d'un corps quadratique correspondant à cette involution.) Référence : [Clark].

5 Jacobiennes sur $\mathbf{C}$, I

Construction et diverses interprétations d'un diviseur Θ.

6 Jacobiennes sur $\mathbf{C}$, II

Théorème de Torelli. Théorème de Riemann sur les singularités de Θ.

Références pour les deux exposés : [B-L], [G-H], [Nar] et l'appendice du [RB].

7 Exposés plus spécialisés

Le contenu reste à déterminer, votre avis et votre aide sont bienvenus ! Idées :

7.1 Invariants d'Igusa sur $\mathbf{C}$ (2 exposés)

- Invariants des formes binaires de degré 6 (et plus)
- Espace de modules de surfaces abeliennes polarisées sur $\mathbf{C}$ (et leur compactification ?)
- Espaces de modules de courbes de genre 2 sur $\mathbf{C}$ (plusieurs constructions possibles : par exemple un ouvert de $\mathbf{P}(2, 4, 6, 10)$, mais d'autres objets seraient-ils plus adaptés au GT ?)

7.2 Variétés abéliennes, Jacobiennes et invariants d'Igusa mod p

1. Automorphismes des surfaces abéliennes mod p, points supersinguliers sur les courbes de Shimura.
2. Espaces de modules de surfaces abéliennes mod p.
3. Idée de JP pour reconnaître un produit de courbes elliptiques.
4. Calcul de la jacobienne mod p. Expliquer de quelle courbe, le produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$ est la jacobienne ([Has04], prop 2.10).

7.3 Perte d'information dans l'interprétation modulaire des courbes de Shimura

— Involutions d'Atkin-Lehner $w_{p|D}$: par lesquelles doit-on quotienter la courbe lorsque l'on oublie la polarisation de la surface abélienne ([Rot]).

— Calculer les points (CM) de ramification de ce quotient.

7.4 Retrouver l'équation de la courbe de Shimura par interpolation aux points CM

— Calcul des points CM en pratique (techniques de [AB] ou de Voight-Willis 2013).

— Calcul d'invariants d'Igusa mod p. Expliquer par exemple les idées de Lauter-Robert 2012 dans le cas d'un corps quartique, puis les adapter au cas des points CM ?

— Calcul de degré de la courbe de Shimura (par exemple à l'aide des formules du genre et du nombre de points elliptiques. Ou en calculant l'équation de la courbe à l'aide de formes modulaires : Voight-Willis 2013 ou Yang 2012).

— Interpolation de l'équation la courbe à l'aide des points CM.

7.5 S'il reste du temps

— Interprétation modulaire dans le cas d'un ordre d'Eichler de niveau N, perte d'information et quotient par les involutions d'Atkin-Lehner $w_{p|N}$.

— Généraliser les constructions pour une algèbre de quaternions sur un corps de nombres autre que $\mathbf{Q}$.

— Description explicite des courbes de genre 2 dans l'image des points CM de la courbe de Shimura (exemples dans Baba-Granath 2005).

Références

[AB] Alsina-Bayer, *Quaternion orders, Quadratic forms, and Shimura curves.* CRM lecture notes, 2004.

[B-L] Birkenhake et Lange, *Complex abelian varieties.* Springer, 2003.

[Clark] Pete Clark, *thèse*, 2003.

[Deb] Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes.* SMF, 1999.

[G-H] Griffiths et Harris, *Principles of algebraic geometry.* John Wiley & sons, 1978.

[Has04] Hasset *Classical and minimal models of the moduli space of curves of genus two.* notes d'introduction, 2004.

[Kat] Katok, *Fuschian groups.* Chicago university press, 1992.

[Lang] Lang, *Introduction to algebraic and abelian functions* Springer, 1972.

[Nar] Narasimhan, *Compact Riemann surfaces.* Birkhauser, 1992.

[RB] Mumford, *the Red book of varieties and schemes.* LNM, 1974.

[Rei] Reiner, *Maximal orders.* Academic press, 1975.

[Rot] Rotger, *thèse*, 2003.

[Sta] Jim Stankiewicz, *thèse*, 2012.

[Vig] Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions.* LNM, 1978.