Introduction à la théorie de Galois
Contrôle de connaissances

30 juin 2003

Durée : 1h30. Les exercices sont indépendants. Les réponses aux questions du problème pourront faire appel aux résultats des questions précédentes.

Exercice 1 *Trouver deux réels x et y vérifiant $x + y = 2$ et $xy = -1$.*

Exercice 2 *Résoudre par radicaux l'équation*

$$X^3 - 3X^2 = 1.$$

Exercice 3 *Soient K un corps, L une extension finie de K, et F_1 et F_2 deux sous-corps de L contenant K (ainsi $K \subset F_1 \subset L$ et $K \subset F_2 \subset L$). On suppose que les entiers $[F_1 : K]$ et $[F_2 : K]$ sont premiers entre eux. Montrer que $F_1 \cap F_2 = K$.*

Problème 4 On se propose ici d'étudier le problème de la résolution des equations de degré 3 par extraction de radicaux réels uniquement (c'est-à-dire sans faire de calcul auxiliaire passant par les nombres complexes). On se fixe p et q deux réels, on note $K = \mathbb{Q}(p, q)$ le sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par p et q, et on suppose que le polynôme

$$P(X) = X^3 + pX + q$$

est irréductible sur K. Notons x, y et z les racines de P dans $\mathbb{C}$.

a) *Montrer que x, y et z sont distinctes et de somme nulle.*

b) *Montrer que ou bien x, y et z sont toutes réelles, ou bien l'une d'elles est réelle et les deux autres sont complexes conjuguées.*

c) *Montrer que si x est réelle et que y et z sont complexes conjuguées, alors il est possible d'exprimer x sur K au moyen d'extractions de radicaux réels uniquement (on pourra admettre ou redémontrer l'identité $((x-y)(y-z)(z-x))^2 = -4p^3 - 27q^2$).*

On supposera dorénavant que x, y et z sont toutes trois réelles, et on va montrer qu'il n'est pas possible de les exprimer par radicaux réels uniquement (autrement dit : pour résoudre par radicaux une équation de degré 3 dont toutes les racines sont réelles, on est obligé de passer par les nombres complexes). Pour ce faire on va procéder par l'absurde, et supposer que l'une des racines de P peut s'exprimer sur K par extraction de radicaux réels uniquement.

d) *Montrer qu'alors il existe une suite finie d'extensions*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathbb{R}$$

et une suite de nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$ telles que K_n contienne une racine de P et que pour tout $i \geq 1$, K_i s'obtienne à partir de K_{i-1} par adjonction d'une racine p_i-ième. Montrer qu'on peut supposer en outre n minimal parmi toutes les suites vérifiant ces propriétés.

e) *Supposons pour commencer $p_n = 2$. Montrer qu'alors K_n est galoisienne sur K_{n-1}, de groupe de Galois composé seulement de l'identité et d'un élément non trivial τ. Exhiber une contradiction sur la minimalité de n (on pourra étudier l'action de τ sur les racines de P).*

f) *Soient E un sous-corps de $\mathbb{R}$, $l \geq 3$ un nombre premier, et a un élément de E qui n'est pas une puissance l-ième dans E. Montrer que le polynôme $X^l - a$ est irréductible sur E.*

g) *Avec les notations de la question précédente, notons F le sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré sur E par l'unique racine l-ième réelle de a. Soit σ un plongement de F dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à E est l'identité. Montrer que si σ n'est pas égal à l'identité sur F, alors*

$$\sigma(F) \cap F = E.$$

h) *En utilisant la question précédente, montrer que l'hypothèse $p_n \geq 3$ aboutit aussi à une contradiction sur la minimalité de n. Conclure.*