MASTER 2 ATIAM : **Traitement du Signal Audionumérique.**

Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Roland Badeau, Bertrand David

Jeudi 31 octobre 2013

Le barème sera réparti sur les 4 parties. En conséquence, ne pas passer tout le contrôle sur une seule des parties.

Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

– Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

– Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

– Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

– TFTD inverse :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$$

– Fonction d'autocovariance d'un processus $X(n)$ stationnaire au sens large (SSL) :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)\,(X(n) - m_X))^* \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n))\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

– Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus $X(n)$ SSL :

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

– **Filtrage des processus SSL** : soit $Y(n)$ le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, d'un processus SSL $X(n)$. Alors $Y(n)$ est un processus SSL :
  – de moyenne $m_Y = H(1)\, m_X$ (où $H(1)$ est la valeur de la réponse en fréquence en $\nu = 0$),
  – de fonction d'autocovariance $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$),
  – de DSP $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$.

I Questions isolées (≈ 55')

Signaux déterministes

a) **Échantillonnage.** Soit $x_a(t)$ un signal analogique sommable et de spectre à bande limitée dans l'intervalle $[-B, +B]$. On considère le signal à temps discret $x(n)$, échantillonné à la fréquence $F_e = 1/T_e$.

1) Exprimer $x(n)$ à l'aide de x_a et T_e.

2) Quelle condition doit vérifier B pour pouvoir reconstituer $x_a(t)$ à partir des échantillons $x(n)$?
3) Si B ne vérifie pas cette condition, à quel phénomène assiste-t-on ?
4) Comment se prémunir contre ce phénomène ?

b) **Linéarité/invariance dans le temps.** Dire si les systèmes suivants, associant à une entrée $x(n)$ une sortie $y(n)$, sont linéaires/non linéaires, invariants dans le temps/non invariants (justifiez vos réponses) :
1) $x(n) \longrightarrow y(n) = x(2n-2)$
2) $x(n) \longrightarrow y(n) = |x(n-3)|$
3) $y(n) = 2x(n) + x(n-1)$

c) **Filtres à phase minimale.** On rappelle qu'un filtre est à *phase minimale* s'il est causal stable et d'inverse causal stable. On considère le filtre de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1-1.8z^{-1}+0.81z^{-2}}{1+0.7z^{-1}}$, dont la réponse impulsionnelle est dans $l_1(\mathbb{Z})$ (sommable).
1) Quels sont les pôles et les zéros du filtre ?
2) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou à réponse impulsionnelle finie (RIF) ? causal ou non causal ? à minimum de phase ? (vous justifierez vos réponses).

d) **Filtre AR1.** On considère le filtre causal défini par sa fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.
1) Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
2) Donner le domaine de définition de $H(z)$ et calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.

e) **Identités nobles.** Démontrer que les opérations suivantes sont équivalentes :
1) $\boxed{\downarrow M}\, G(z) \equiv G(z^M)\, \boxed{\downarrow M}$
2) $G(z)\, \boxed{\uparrow L} \equiv \boxed{\uparrow L}\, G(z^L)$
3) $\boxed{\downarrow 3}\,\boxed{\uparrow 2} \equiv \boxed{\uparrow 2}\,\boxed{\downarrow 3}$ (on pourra appliquer directement le résultat démontré en cours)

Processus aléatoires

g) **Processus mixte.** On étudie le processus $X(n) = d(n) + B(n)$ où $d(n)$ est un signal réel déterministe et $B(n)$ un processus réel IID, centré, de variance σ_B^2. A quelle condition $X(n)$ est-il stationnaire à l'ordre 1 ? Etudier la stationnarité à l'ordre 2 de X (on calculera sa covariance $R_X(n+k,n) = \mathbb{E}((X(n)-\mathbb{E}(X(n)))(X(n+k)-\mathbb{E}(X(n+k)))))$.

h) **Somme de deux processus SSL.** Soient deux processus $X_1(n)$ et $X_2(n)$ indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance R_{X_1} et R_{X_2}, et de DSP S_{X_1} et S_{X_2}. Prouver que le processus $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$ est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$ et de DSP $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$.

i) **Puissance d'un processus SSL.** Soit $\epsilon(n)$ un processus SSL réel centré, de DSP $S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})$. On définit $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon(n)^2)$. Prouver que $\sigma_\epsilon^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})d\nu$.

j) **Estimation de la fonction d'autocovariance.** Soit $X(n)$ un processus SSL réel centré dont on observe une réalisation sur N échantillons $X(0)$, $X(1), \ldots, X(N-1)$. Pour estimer sa fonction d'autocovariance R_X, on considère l'estimateur $\widehat{R}_X(k) = \frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1-k} X(n)X(n+k)$ pour $0 \leq k \leq N-1$, $\widehat{R}_X(k) = \widehat{R}_X(-k)$ pour $-N+1 \leq k \leq -1$, et $\widehat{R}_X(k) = 0$ pour toute autre valeur de k.
(a) Déterminer le biais de cet estimateur pour $k \in [-N+1 \ldots N-1]$.
(b) En déduire un estimateur non biaisé $\widehat{R}'_X$ de R_X pour $k \in [-N+1 \ldots N-1]$.
(c) On définit le signal x_c tel que $x_c(n) = X(n)$ pour $n = 0, \ldots, N-1$ et $x_c(n) = 0$ ailleurs. Vérifier que l'estimateur biaisé $\widehat{R}_X$ satisfait $\widehat{R}_X = \frac{1}{N} x_c \star \tilde{x}_c$. où $\tilde{x}_c(n) = x_c(-n)$.
(d) En déduire que le périodogramme, défini comme la TFTD de $\widehat{R}_X$, vaut $I_X(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{N}|X_c(e^{2i\pi\nu})|^2$.

II Petit exercice : filtre réjecteur (≈ 10')

On considère le filtre $H(z) = \frac{1-2\cos(\theta)z^{-1}+z^{-2}}{1-2\rho\cos(\theta)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$, avec $0 < \rho < 1$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que $H(z)$ peut être factorisé sous la forme $H(z) = \frac{(1-z_0 z^{-1})(1-z_0^* z^{-1})}{(1-\rho z_0 z^{-1})(1-\rho z_0^* z^{-1})}$, où l'on exprimera z_0 en fonction de θ. Quelle est la fréquence réduite coupée par ce filtre ?

b) Quel est le domaine de convergence de son implémentation stable ? Cette implémentation est-elle causale ? Ecrire la relation entrée/sortie correspondante.

c) Calculer, en fonction de ρ et θ, la réponse impulsionnelle $g(n)$ de la partie autorégressive du filtre réjecteur, définie par la fonction de transfert $G(z) = \frac{1}{1-2\rho\cos(\theta)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}$. Indication : on utilisera la décomposition en éléments simples $G(z) = \frac{1}{z_0 - z_0^*}\left(\frac{z_0}{1-\rho z_0 z^{-1}} - \frac{z_0^*}{1-\rho z_0^* z^{-1}}\right)$ et le résultat de la question I.d2).

d) Comment varie la longueur du transitoire de $g(n)$ lorsque $\rho \to 1$?

III Sous-échantillonnage (≈ 25', signaux déterministes)

Soit un signal à temps discret $x(n)$, que l'on souhaite sous-échantillonner d'un facteur 2. On rappelle le schéma standard de sous-échantillonnage :

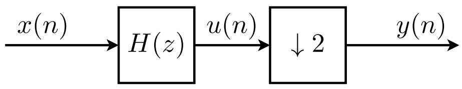


FIGURE 1 – Schéma de sous-échantillonnage

où H est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\frac{1}{4}$: $\forall \nu \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, $H(e^{2i\pi\nu}) = 1$ si $\nu \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, et $H(e^{2i\pi\nu}) = 0$ sinon.

a) Quel est le rôle du filtre H dans la figure 1 ?

b) On définit le filtre de réponse en fréquence $G(e^{2i\pi\nu}) = e^{i\pi\nu}$ pour tout $\nu \in]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$.
   1) Calculer sa réponse impulsionnelle $g(n)$ pour tout $n \in Z$.
   2) Ce filtre est-il stable ? Est-il causal ? (justifiez)
   3) Décrire la méthode de la fenêtre pour synthétiser un filtre RIF à phase linéaire qui approxime $g(n)$.

c) On considère le schéma de la figure 2.
   1) Exprimer $U(z)$ en fonction de $G(z)$ et $X(z)$.
   2) Évaluer $G(z^2)$ en $z = e^{2i\pi\nu}$, pour $\nu \in [0, \frac{1}{4}[$ d'une part et $\nu \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ d'autre part.
   3) En déduire la relation entre $U(e^{2i\pi\nu})$ et $X(e^{2i\pi\nu})$, et en conclure que ce schéma définit une implémentation équivalente du filtre H.

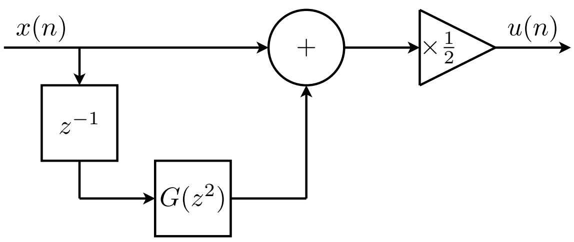


FIGURE 2 – Implémentation équivalente du filtre H

d) On considère le schéma de la figure 3.
   1) Vérifier que ce schéma est équivalent à celui de la figure 1 (on pourra utiliser l'une des identités nobles de la question I.e)).
   2) Quel est l'avantage de l'implémentation du schéma de la figure 3 par rapport au schéma de la figure 1 ?

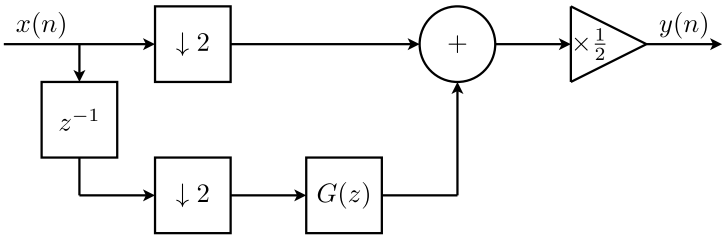
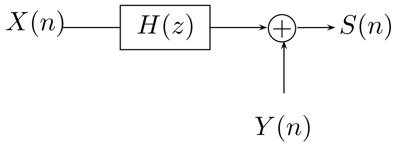


FIGURE 3 – Implémentation efficace du sous-échantillonnage

IV Filtrage optimal (≈ 25', processus aléatoires)

On considère le modèle de mélange additif de processus donné par la figure suivante :

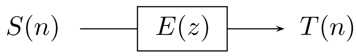


où $X(n)$ et $Y(n)$ sont deux processus indépendants et identiquement distribués (IID), centrés, indépendants entre eux, de variances σ_X^2 et σ_Y^2. Le filtre est causal, de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.

a) Démontrer que $S(n)$ est centré et exprimer sa fonction d'autocovariance $R_S(k)$ en fonction de σ_X, σ_Y et h (on pourra utiliser la réponse à la question I.h) et le théorème de filtrage des processus SSL).

b) En déduire l'expression de la variance de $S(n)$, notée σ_S^2 en fonction de σ_X, σ_Y et a (on pourra utiliser le résultat de la question I.d2)).

c) On filtre maintenant $S(n)$ par un filtre d'égalisation $E(z)$, pour obtenir le processus $T(n)$:



1) Démontrer qu'il existe un filtre $E(z)$ causal stable tel que $E(z)H(z) = 1$ et déterminer sa réponse impulsionnelle $e(n)$.
2) Prouver alors que le processus transmis s'écrit $T(n) = X(n) + W(n)$ où l'on exprimera le processus W en fonction de Y et e.

d) On cherche ce que vaut le rapport signal à bruit (RSB) en sortie, défini par $\eta = \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_W^2}$.

1) Exprimer σ_W^2 en fonction de σ_Y^2.
2) Exprimer η en fonction du RSB en entrée $\eta_e = \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ et de a.

e) Nous allons démontrer que le choix précédent de $E(z)$ ne conduit pas à la plus grande valeur possible du RSB. On va donc chercher un **autre** filtre $E(z)$ qui minimise l'écart quadratique $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}|\epsilon(n)|^2$, où le processus $\epsilon(n)$ est défini par $\epsilon(n) = X(n) - T(n)$.

1) Écrire $\epsilon(n)$ sous la forme d'une expression faisant intervenir $X(n)$, $Y(n)$ et les réponses impulsionnelles des différents filtres.
2) En déduire une expression de la DSP de $\epsilon(n)$, notée $S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})$ en fonction σ_Y, σ_X, $H(e^{2i\pi\nu})$ et $E(e^{2i\pi\nu})$ (on pourra utiliser le théorème de filtrage des processus SSL).
3) Exprimer la variance σ_ϵ^2 de $\epsilon(n)$ sous la forme d'une intégrale (on pourra utiliser le résultat de la question I.i)).
4) En utilisant l'identité ci-dessous, en déduire l'expression de $E(e^{2i\pi\nu})$ qui minimise σ_ϵ^2, en fonction de $H(e^{2i\pi\nu})$ et de η_e.

<u>Identité :</u> $|1 - HE|^2 + \alpha^2|E|^2 = \left| E\,(|H|^2 + \alpha^2)^{1/2} - \dfrac{H^*}{(|H|^2 + \alpha^2)^{1/2}} \right|^2 + \dfrac{\alpha^2}{|H|^2 + \alpha^2}$