par Karim Zayana et Olivier Rioul

Le soleil se lèvera-t-il demain ?

Faut-il vivre chaque jour comme s'il était le dernier ? Cette question est légitime quand on sait que Pierre-Simon de Laplace, en 1814, évaluait à 0,99999945 la probabilité que le Soleil se lève à nouveau le lendemain…

Il n'y a pas plus trompeur qu'un raisonnement inductif mal construit. D'ailleurs, ne nous met-on pas en garde ? *« Ce n'est pas parce que l'on vient de tirer cinq fois "pile" avec une pièce qu'elle a moins de chances de tomber sur "pile" au sixième lancer ! »* nous avertit le professeur, avant d'ajouter, en ponctuant ses syllabes : *« Les évènements sont in-dé-pen-dants. »* À l'inverse, comment ne pas voir une loi des séries quand le destin s'obstine ? Le mathématicien du XX^e siècle Bertrand Russell (voir notre dossier dans *Tangente* 206, 2022) aura, lui, cité l'exemple d'une dinde de Noël : généreusement traitée chaque matin, ne prend-elle pas confiance en la main nourricière qui lui tordra pourtant le cou le soir du réveillon ? Qui croire, alors ? Le professeur, Russell, ou… Laplace ? Eh bien chacun d'eux, car tout dépend des hypothèses ! En particulier, l'approche bayésienne va éclairer la démonstration de Laplace, qui évaluait à 0,99999945 la probabilité que le Soleil se lève à nouveau le lendemain.

+ Des lancers « indépendants »

Laplace fonde sa réflexion dès 1774 dans son traité *Mémoires sur la probabilité des causes par les évènements*, et l'illustre quarante ans après sur la succession des jours dans son *Essai philosophique sur les probabilités*.

Commençons par un cas d'école : la pièce de 1 euro. Supposons-la, dans un premier temps, bien équilibrée, et lançons-la plusieurs fois. Les lancers sont faits dans des conditions qui n'ont rien à voir les unes avec les autres : en langage courant, ils sont « indépendants ». On peut donc admettre que les évènements de « pile » ou « face » successifs seront indépendants au sens mathématique du terme. Ainsi la pièce ne garde-t-elle aucune mémoire des lancers précédents.

Ce raisonnement s'applique également à une pièce déséquilibrée, dont la probabilité de tomber sur « pile » vaudrait x (et donc sur « face », $1 - x$). Avec des lancers « indépendants », les évènements successifs demeurent mathématiquement indépendants : ce n'est pas parce que l'on vient de tirer cinq fois « pile » que cela change les chances du sixième lancer, dont la probabilité de tomber sur « pile » vaut toujours x.

Compliquons maintenant les choses en prenant deux pièces distinctes, aux probabilités respectives x_1 et x_2 de tomber sur « pile » une fois lancées. Pour exagérer, on pourrait imaginer x_1 « très voisine » de 1 (voire égale à 1) et x_2 « très voisine » de 0 (voire égale à 0). Piochons à l'aveugle l'une des deux pièces dans notre porte-monnaie et lançons-la six fois de suite. Dans l'hypothèse où elle tomberait d'abord cinq fois sur « pile », cela laisse présager qu'on a pioché la première pièce. Cela renforce donc la probabilité qu'elle tombe une sixième fois sur « pile ». Dans cette nouvelle situation, les lancers restent « indépendants », mais plus les évènements de « pile » ou « face » successifs ! Mathématiquement, il y a *indépendance conditionnelle* (une fois la pièce choisie), mais « pas indépendance stricte » (inconditionnelle). On note E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 les évènements successifs de « pile » ou « face » et N le numéro (égal à 1 ou 2) de la pièce choisie au hasard. Le calcul en encadré prouve que

$$P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \ldots E_5=\text{pile}}(E_6 = \text{pile}) = \frac{x_1^6 + x_2^6}{x_1^5 + x_2^5}.$$

+ Tout est en place pour Laplace

Un beau jour de 1814, Laplace se demande avec quelle probabilité le Soleil se lèvera à nouveau le lendemain, sachant qu'il s'est toujours levé chaque matin depuis que l'Homme est apparu sur Terre. Cette question, devenue célèbre, peut apparaître incongrue ; voyons ce qu'en fait le savant, à la fois mathématicien, physicien et philosophe. Étant posé que le Soleil s'est déjà levé n fois de suite, Laplace se demande s'il reviendra le $(n+1)^{\text{ième}}$ matin. Il assimile les levers de Soleil à des « épreuves indépendantes » suivant une loi de Bernoulli de même paramètre de succès p. Hélas, l'univers a certes fixé p, mais sans nous le dévoiler. Laplace suppose donc que la valeur de p a été choisie « au hasard » dans un ensemble X de valeurs x comprises entre 0 et 1. Contrairement au cas du porte-monnaie, X pourrait comprendre un continuum de valeurs. Cette éventualité amène Laplace à étendre la dernière formule de l'encadré ci-contre du discret au continu, remplaçant les sommes par des intégrales. D'où, en conduisant le même raisonnement et en adaptant les notations :

$$P_{E_1=\text{se lève}, E_2=\text{se lève} \dots E_n=\text{se lève}}(E_{n+1}=\text{se lève}) = \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx}{\int_0^1 x^n f(x)dx}.$$

Un passage à la limite (voir ci-dessous) montre que cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Cependant, les grands théorèmes de convergence ne seront formalisés qu'au cours du XX^e^ siècle, notamment par Henri Lebesgue.

Pour son application numérique, Laplace postule *a priori* une densité uniforme (cette hypothèse, devenue classique, est connue sous le nom d'a priori *de Laplace*), soit $f = 1_{[0,1]}$. La probabilité recherchée est donc exactement égale à $\frac{\int_0^1 x^{n+1}dx}{\int_0^1 x^n dx}$, soit $\frac{n+1}{n+2}$.

Laplace estime ensuite l'âge de l'humanité à 5 000 ans, soit n = 1 826 213 jours. Ce faisant, il obtient la probabilité annoncée : environ 0,99999945.

Ce résultat, « proche » de 1 mais pas tout à fait égal à 1, provient de l'hypothèse *a priori* que l'univers a choisi aléatoirement le paramètre p qui gouvernerait (en partie) le Système solaire. L'existence de cet *a priori*, caractéristique de l'approche bayésienne, peut être critiquée. Doit-on pour autant rejeter cette approche ? C'est un débat perpétuel entre « bayésiens » et « fréquentistes » !

K.Z. & O.R.

Indépendance conditionnelle : le déroulement des calculs

D'une part, par définition d'une probabilité conditionnelle, avec les notations usuelles, on a :

$$P(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}) = \frac{P(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}, E_6=\text{pile})}{P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}}(E_6=\text{pile})}.$$

D'autre part, par la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}) = P_{N=1}(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}) \times P(N=1) + P_{N=2}(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}) \times P(N=2).$$

Convenons de l'équiprobabilité du choix des pièces :
$P(N=1) = P(N=2) = 1/2$.

Puisque les lancers sont « indépendants », on obtient :
$P(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_5=\text{pile}) = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_2^5\right)$.

De même, on calcule $P(E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_6=\text{pile}) = \frac{1}{2}\left(x_1^6 + x_2^6\right)$.

On en déduit le résultat annoncé dans le texte.

On peut généraliser en prenant k pièces distinctes, dont les probabilités de tomber sur « pile » sont respectivement $x_1, x_2 \dots x_k$. Disons que ces pièces ont des probabilités égales d'être choisies dans notre porte-monnaie :
$P(N=1) = P(N=2) = \dots = P(N=k) = 1/k$.

Tirons une pièce au hasard, puis lançons-la $n+1$ fois. Si les n premiers lancers donnent « pile », alors :

$$P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_n=\text{pile}}(E_{n+1}=\text{pile}) = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^{n+1}}{\sum_{j=1}^{k} x_j^n}.$$

Envisageons enfin des pièces de tailles ou de formes différentes : distinctes au toucher, leurs probabilités d'être choisies ne sont plus nécessairement égales ! Elles valent maintenant
$P(N=1) = f(x_1)$, $P(N=2) = f(x_2) \dots = P(N=k) = f(x_k)$,
où f désigne une mesure de probabilité.

Dès lors, $P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \dots E_n=\text{pile}}(E_{n+1}=\text{pile}) = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^{n+1} f(x_j)}{\sum_{j=1}^{k} x_j^n f(x_j)}$.

Un passage à la limite délicat

Posons $u = x^{n+2}$ dans l'intégrale du numérateur et $u = x^{n+1}$ dans celle du dénominateur. Ces changements de variable conduisent dans un cas à $du = (n+2)x^{n+1}dx$ et, dans l'autre, à $du = (n+1)x^n dx$.

Les bornes d'intégration restent inchangées et le rapport $\frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx}{\int_0^1 x^n f(x)dx}$ devient $\frac{n+1}{n+2} \times \frac{\int_0^1 f\left(u^{1/(n+2)}\right)du}{\int_0^1 f\left(u^{1/(n+1)}\right)du}$.

En supposant f continue, les deux intégrales admettent $f(1)$ pour limite par le théorème de convergence dominée. Pourvu que $f(1)$ soit non nul, le rapport étudié équivaut donc au quotient annoncé et tend donc vers 1.