Micro et Nano Physique (MNP)

Cours 2 : quelques mises en application des principes de la mécanique quantique

(approche conceptuelle)

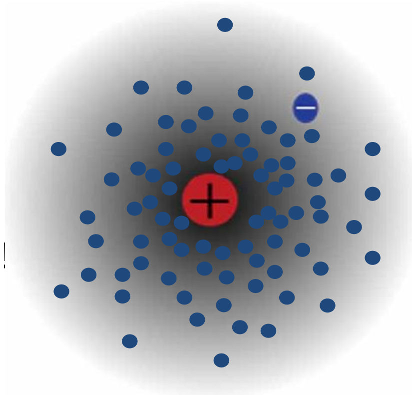
- Nous avons postulé l’existence d’opérateurs pour décrire un processus de mesure. Mais comment trouver ces opérateurs ?

  - **Principe de correspondance** énoncé par Niels Bohr en 1923 : « la mécanique quantique se réduit à la mécanique classique "à la limite des grands nombres quantiques" », qui impose des contraintes sur la pertinence des opérateurs. Ce principe est par exemple vérifié par le théorème d’Ehrenfest.

  - Considérons la mesure de la position d’une particule (telle que l’électron dans l’atome H)

    - On peut détecter l’électron n’importe où au voisinage du noyau

    - Donc **l’ensemble des résultats de mesure possibles est continu** !



- D'après nos grands principes, un résultat de mesure de la position est une valeur propre de l'opérateur associé. Pour un tel résultat $\vec{r}_0$, on a donc :

$$\hat{\vec{R}}\left|\vec{r}_0\right\rangle = \vec{r}_0\left|\vec{r}_0\right\rangle$$

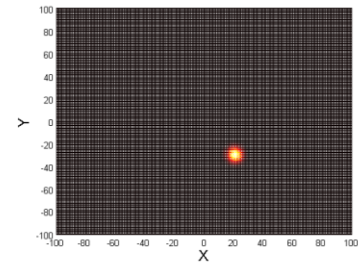
où $\left|\vec{r}_0\right\rangle$ est l'état quantique correspondant à ce résultat. Puisque la mesure nous a appris quelle était la connaissance de la position, **celle-ci est parfaitement connue après mesure**.

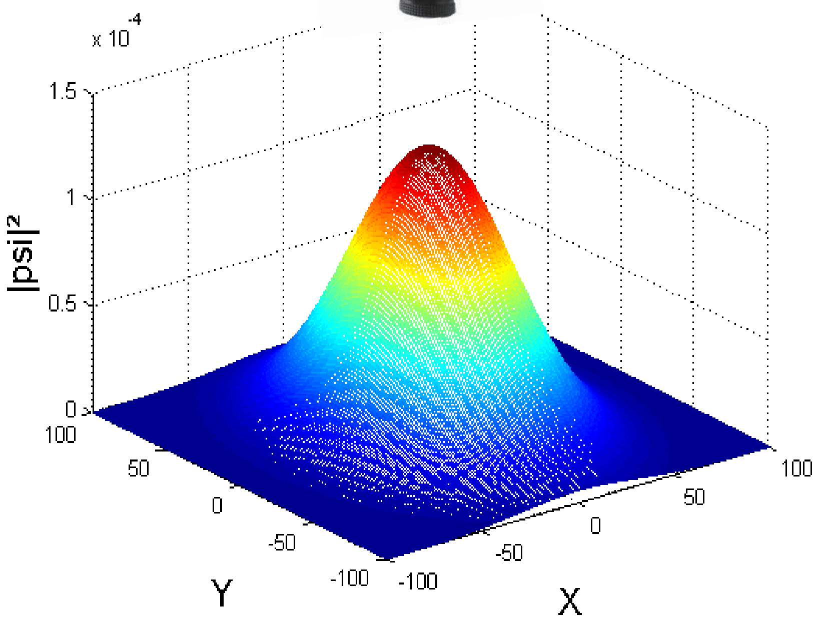
- Avant la mesure, la position est incertaine avec une **densité de probabilité de présence** :

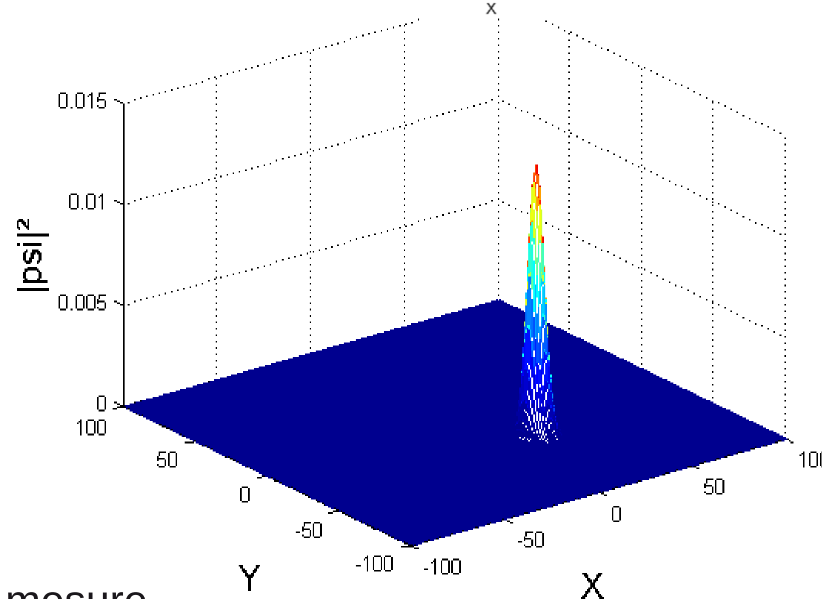
$$dP(\vec{r}) = \frac{\left|\left\langle \vec{r} \middle| \psi \right\rangle\right|^2}{\left\langle \psi \middle| \psi \right\rangle} = \frac{\left|\psi(\vec{r})\right|^2}{\left\langle \psi \middle| \psi \right\rangle}$$

où $\psi(\vec{r}) = \left\langle \vec{r} \middle| \psi \right\rangle$ est communément appelée la « fonction d'onde ».

Photo







mesure

AVANT
une mesure de position

APRES
la mesure

- Rappel : L'opérateur $\hat{\vec{R}}$ est diagonalisable, ses états propres constituent une base. Compte-tenu du caractère continu de la position :

$$|\psi\rangle = \sum_n \langle\varphi_n|\psi\rangle|\varphi_n\rangle \quad \rightarrow \quad |\psi\rangle = \int\langle\vec{r}|\psi\rangle|\vec{r}\rangle d^3r = \int\psi(\vec{r})|\vec{r}\rangle d^3r$$

Et il faut dans ce cas que la base soit orthonormée au sens de Dirac :

$$\langle\varphi_m|\varphi_n\rangle = \delta_{mn} \quad \rightarrow \quad \langle\vec{r}_1|\vec{r}_2\rangle = \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\rightarrow \quad \int\langle\vec{r}|\vec{r}_0\rangle d^3r_0 = \int\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)d^3r_0 = 1$$

Rappel : en 1D

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1 \;;\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

- Un état $|\vec{r}\rangle$ n'a pas de réalité physique : il est de norme infinie. Donc en mécanique quantique **il est impossible de déterminer exactement la position d'une particule**

- Intéressons-nous maintenant à la mesure de l'impulsion de la particule. On peut adopter exactement la même démarche :

$$|\psi\rangle = \int \langle \vec{p}|\psi\rangle |\vec{p}\rangle d^3p = \int \overline{\psi}(\vec{p}) |\vec{p}\rangle d^3p \qquad \langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$$

$$\hat{\vec{P}} |\vec{p}_0\rangle = \vec{p}_0 |\vec{p}_0\rangle \qquad dP(\vec{p}) = \frac{|\langle \vec{p}|\psi\rangle|^2}{\langle \psi|\psi\rangle} = \frac{|\overline{\psi}(\vec{p})|^2}{\langle \psi|\psi\rangle} \qquad \overline{\psi}(\vec{p}) = \langle \vec{p}|\psi\rangle$$

où $dP(\vec{p})d^3p$ est la probabilité que le résultat de la mesure de l'impulsion soit $\vec{p}$ à d^3p près

- $\psi(\vec{r})$ et $\overline{\psi}(\vec{p})$ sont deux fonctions différentes qui représentent chacune complètement $|\psi\rangle$, puisque l'ensemble (infini) des $|\vec{r}\rangle$ comme l'ensemble (infini) des $|\vec{p}\rangle$ forme une base. On parle de « **représentation R** » ou de « **représentation P** »

- Pour un système de particules, la représentation R comme la représentation P sont des descriptions complètes et équivalentes de l'état quantique

$$
\begin{tikzcd}
 & \left|\psi\right\rangle \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\psi(\vec{r}) \arrow[rr, Leftrightarrow, "\textbf{TF}"] & & \overline{\psi}(\vec{p})
\end{tikzcd}
$$

représentation R **représentation P**

Toute fonction de carré sommable représente un état possible pour la particule

- Tout ceci ressemble à un petit jeu mathématique, mais où est la physique ? Puisque $\psi(\vec{r})$ et $\overline{\psi}(\vec{p})$ sont « deux faces » d'un même objet quantique, l'état $|\psi\rangle$, y a-t-il une relation entre ces deux fonctions ?
  - Sans limitation de généralité, on peut écrire $|\vec{p}\rangle = \int \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle |\vec{r}\rangle d^3r = \int \psi_{\vec{p}}(\vec{r}) |\vec{r}\rangle d^3r$

    où $\psi_{\vec{p}}(\vec{r})$ est la fonction d'onde de l'état $|\vec{p}\rangle$

  - C'est **à ce stade qu'intervient la règle de quantification** : elle a été exprimée par Louis de Broglie en 1924 : un système de particules d'impulsion $\vec{p}$ parfaitement définie est représenté par une **onde plane** $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$$ permet de vérifier $\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$

La longueur d'onde est donc donnée par la **relation de De Broglie** $\lambda = \frac{h}{|\vec{p}|}$

(dualité « onde-corpuscule »)

- Deux notations différentes pour la même chose !

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)$$ permet de vérifier $\langle \vec{p}_1 | \vec{p}_2 \rangle = \delta(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)$

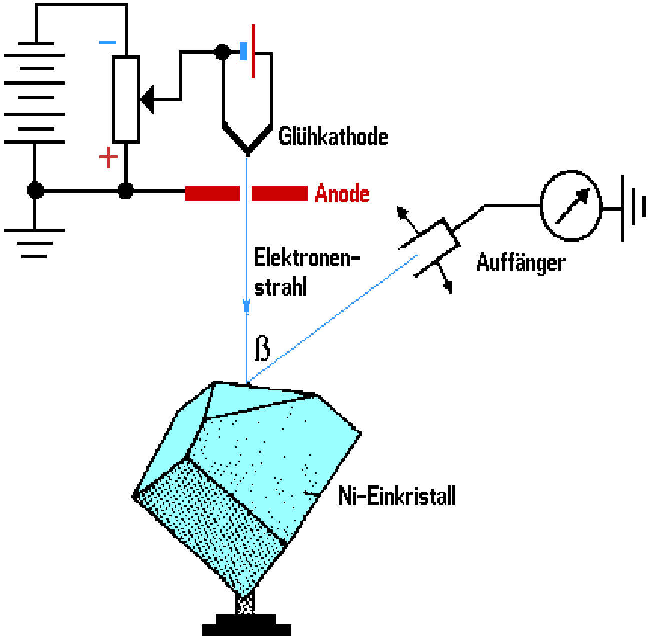
$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r})$$ permet de vérifier $\langle \vec{k}_1 | \vec{k}_2 \rangle = \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$

Ce sont les mêmes états quantiques, indexés par $\vec{k}$ au lieu de $\vec{p}$, et sont liés par la relation de De Broglie qu'on peut écrire sous la forme $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

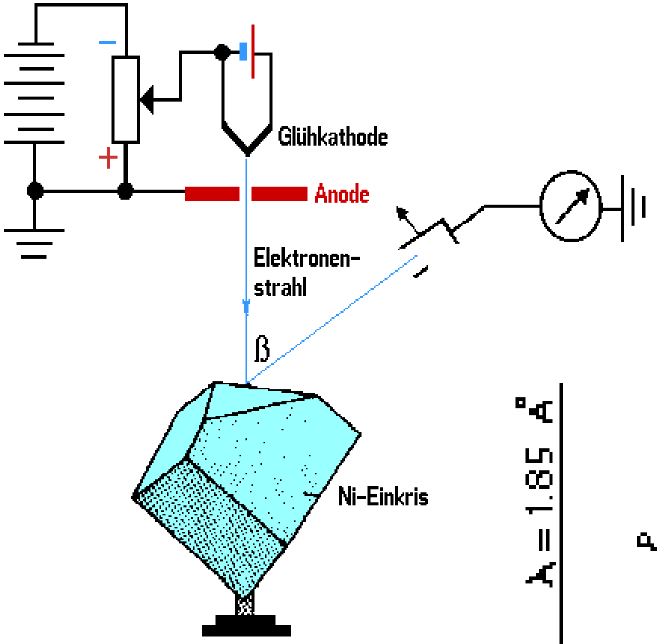
- A une dimension : $\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right)$ $\quad \psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik\cdot x)$

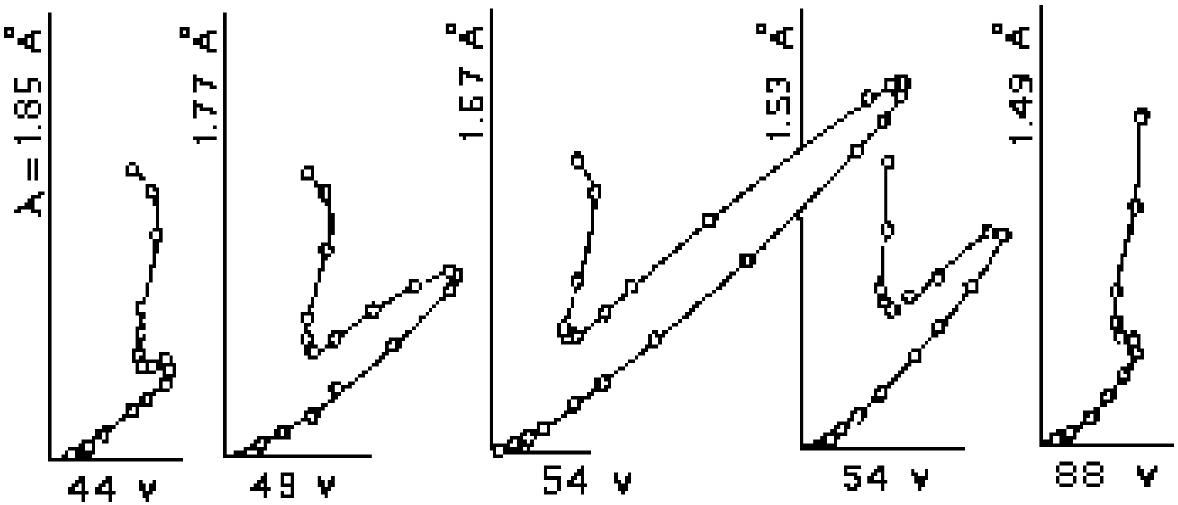
$$p = \hbar k = 2\pi\frac{\hbar}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$$

- La première expérience de diffraction des électrons a été effectuée par Davisson & Germer en 1927, et a permis de valider la relation de De Broglie

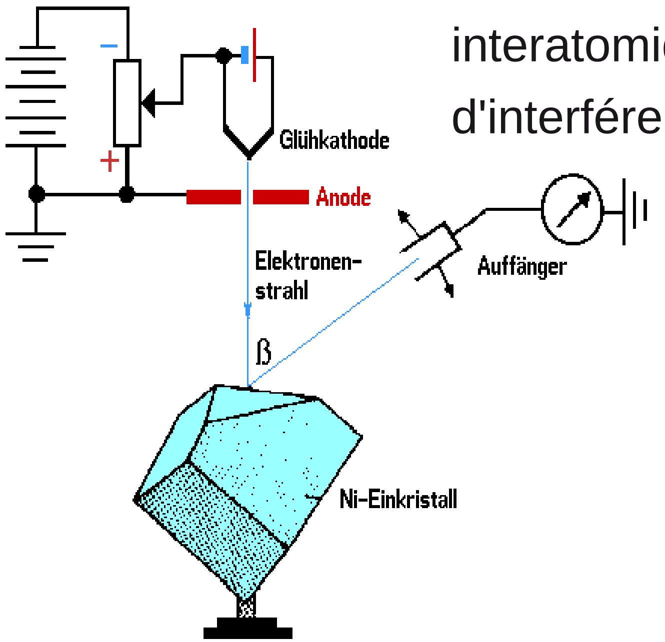


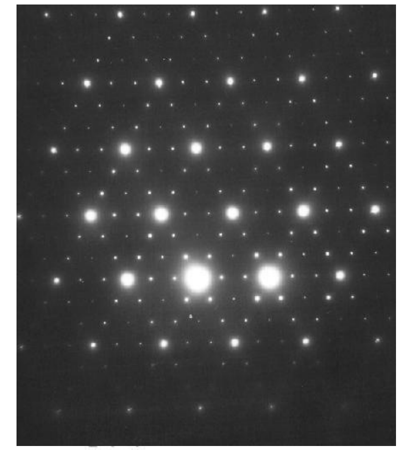
■ La première expérience de diffraction des électrons a été effectuée par Davisson & Germer en 1927, et a permis de valider la relation de De Broglie

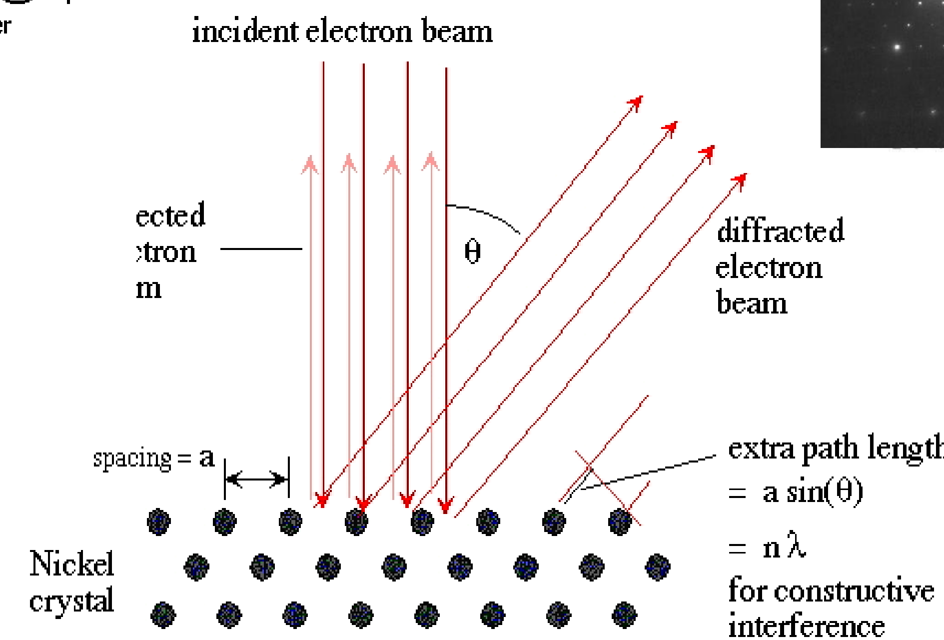




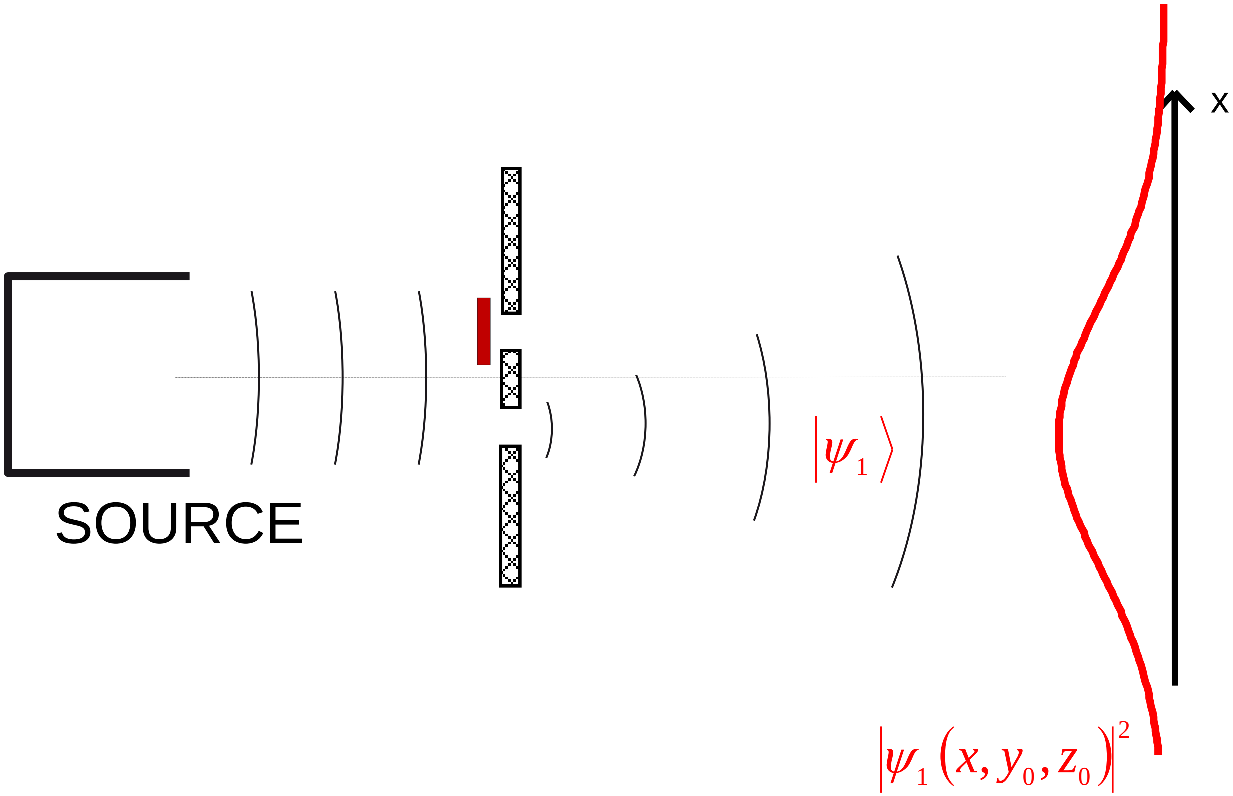
- Le faisceau diffracté n'est intense que si la longueur d'onde et l'espacement interatomique vérifient une relation d'interférences constructives



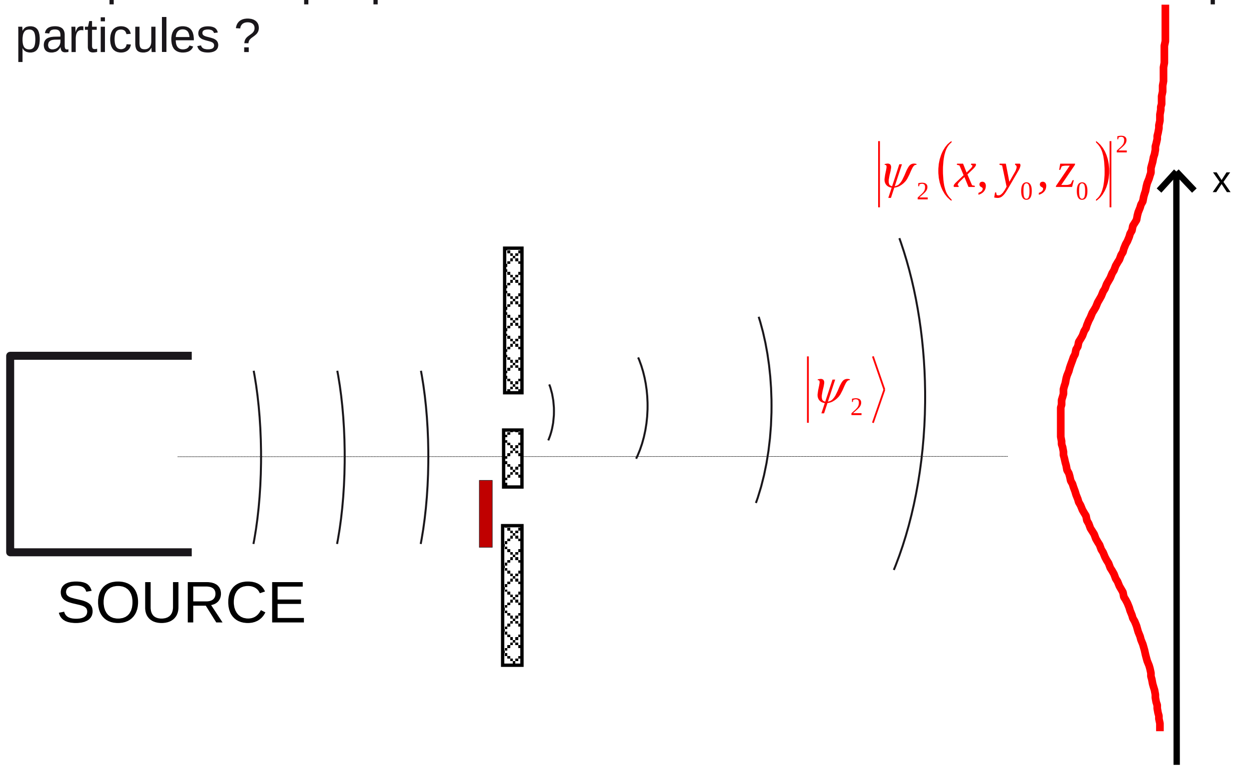




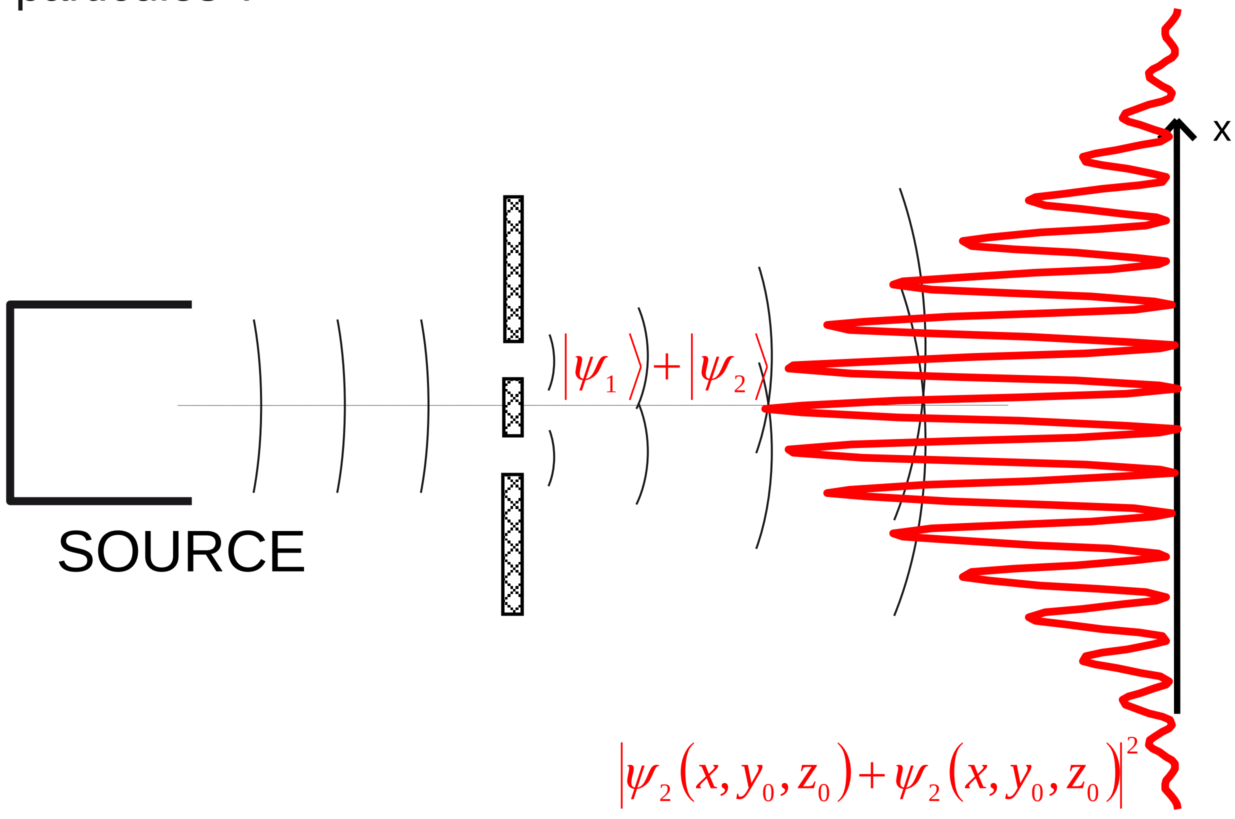
- Retour au principe de superposition. Peut-on en voir la traduction pour un système de particules ?



- Retour au principe de superposition. Peut-on en voir la traduction pour un système de particules ?

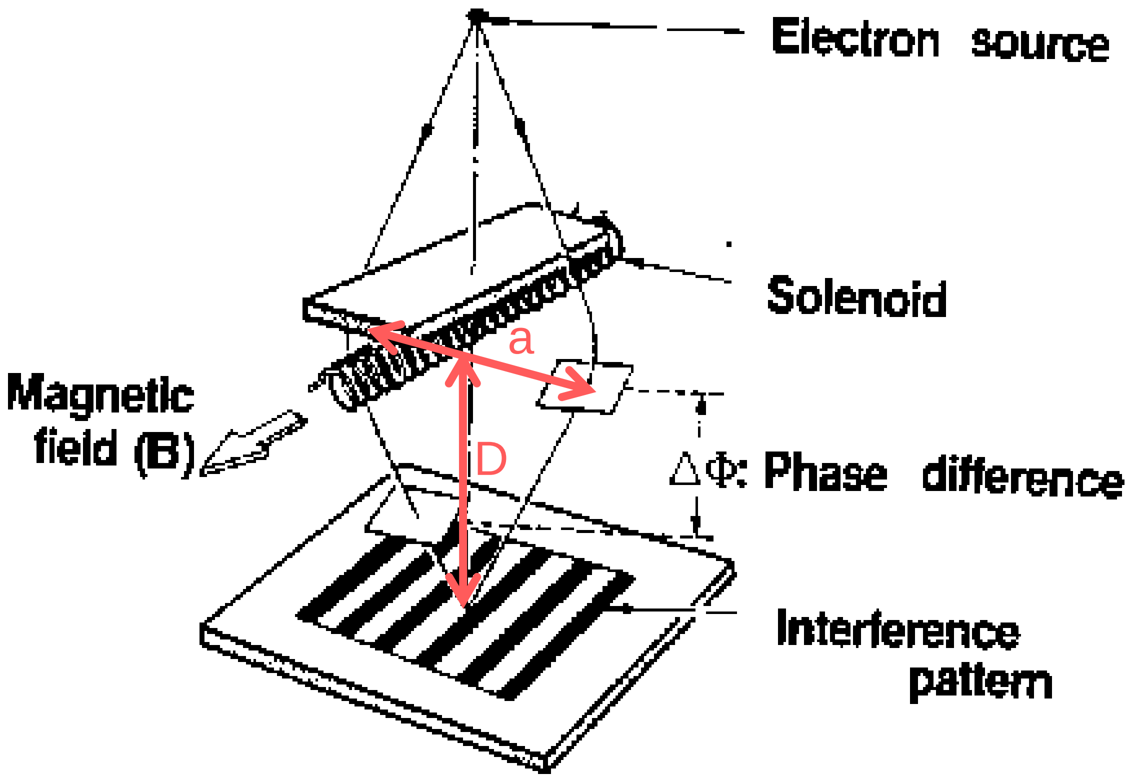


- Retour au principe de superposition. Peut-on en voir la traduction pour un système de particules ?



L’expérience des fentes d’Young

- Démonstration expérimentale avec des électrons :

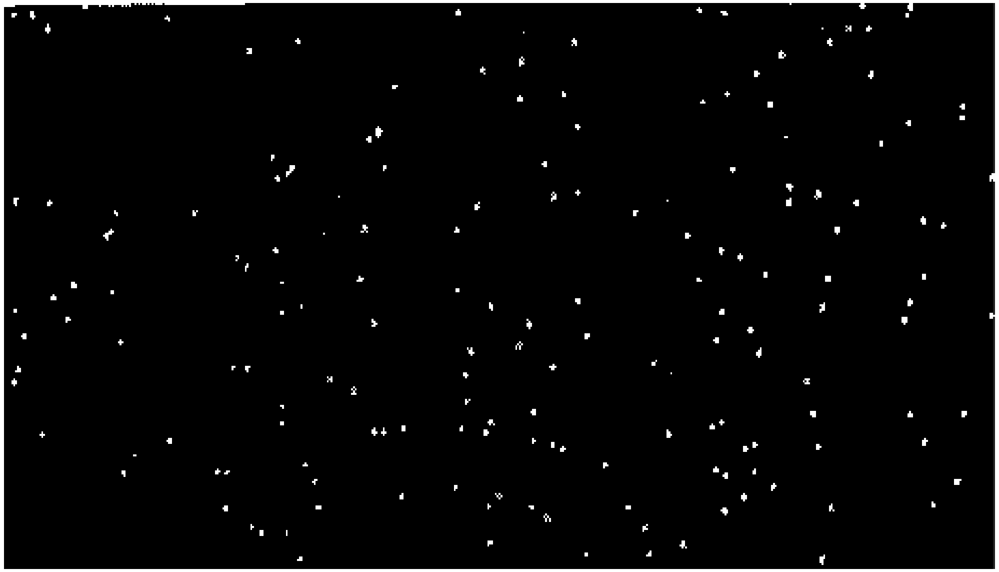


L’expérience des fentes d’Young

- Démonstration expérimentale avec des électrons :

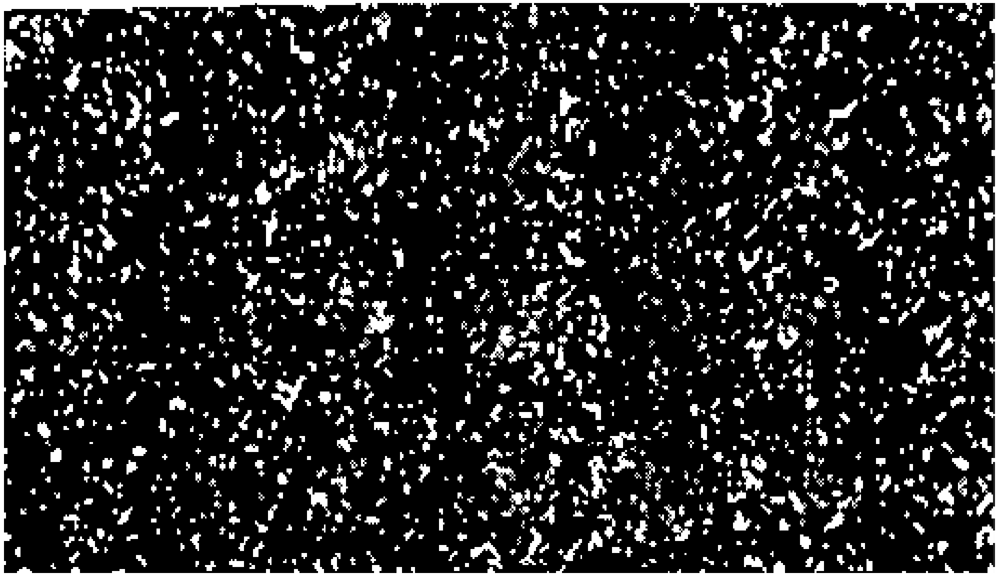
L’expérience des fentes d’Young

- Démonstration expérimentale avec des électrons :



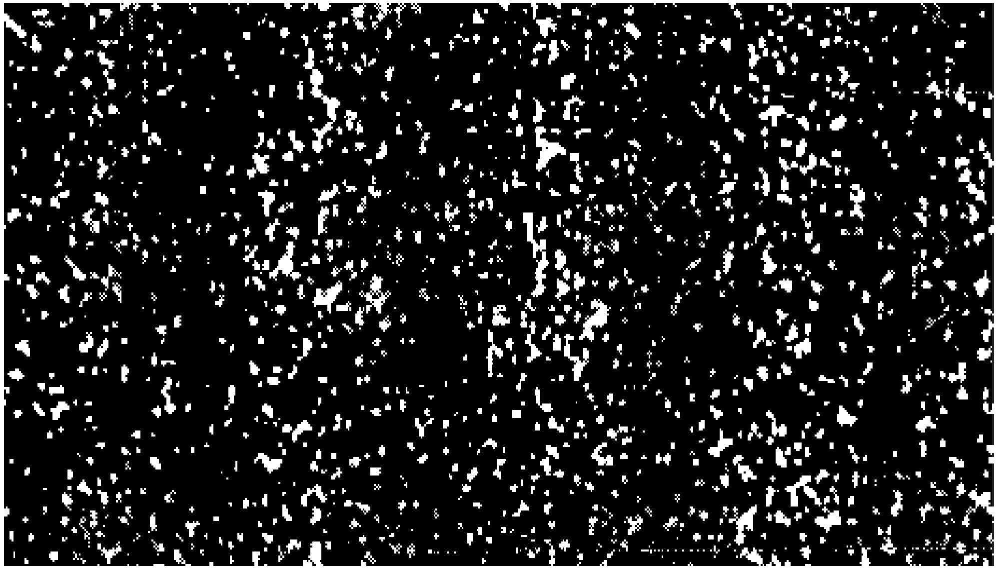
L’expérience des fentes d’Young

- Démonstration expérimentale avec des électrons :



L'expérience des fentes d'Young

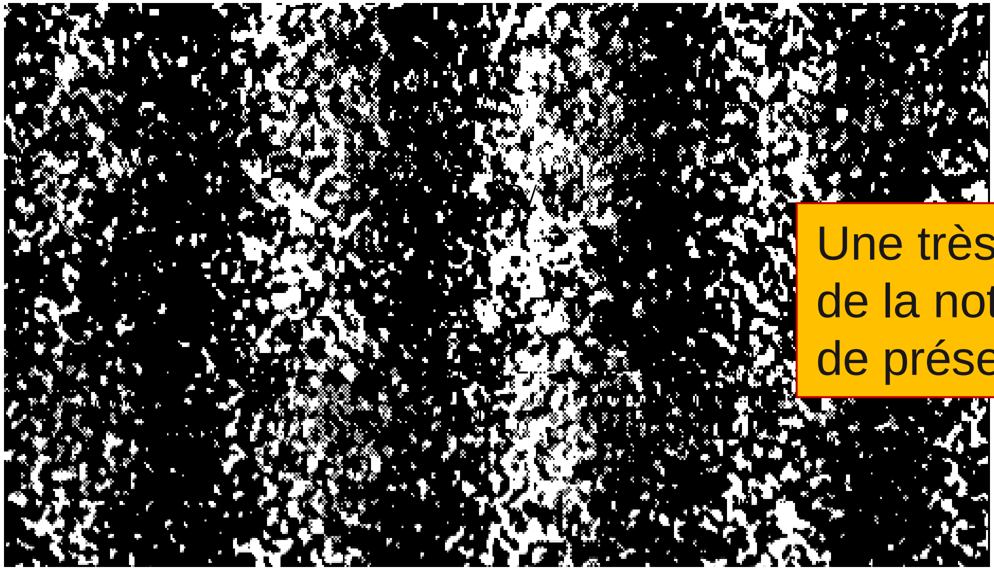
- Démonstration expérimentale avec des électrons :



L'expérience des fentes d'Young

Interfrange : $\lambda D / a = \dfrac{hD}{pa} = \dfrac{hD}{a\sqrt{2mE}}$

E= énergie cinétique des électrons accélérés

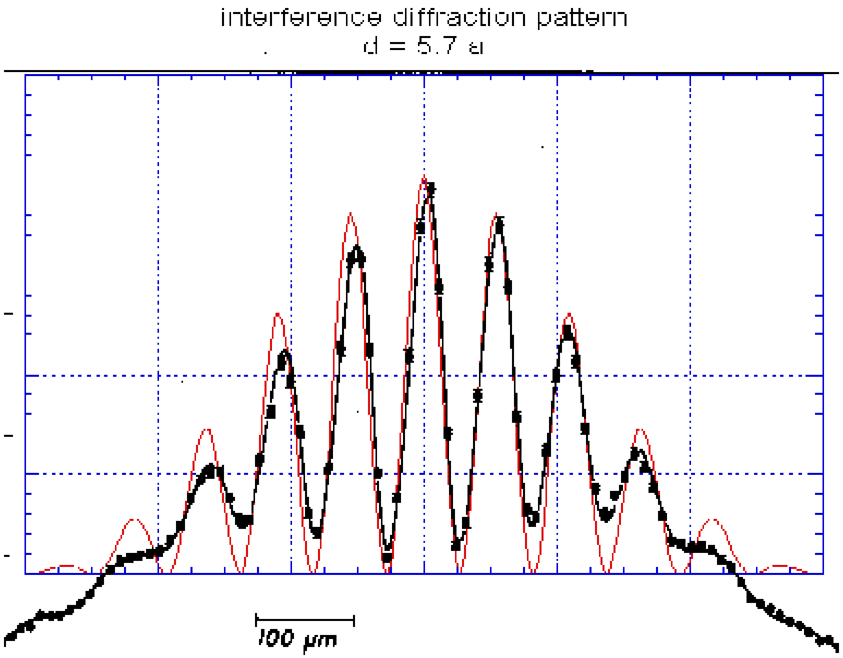


Une très belle illustration de la notion de probabilité de présence !

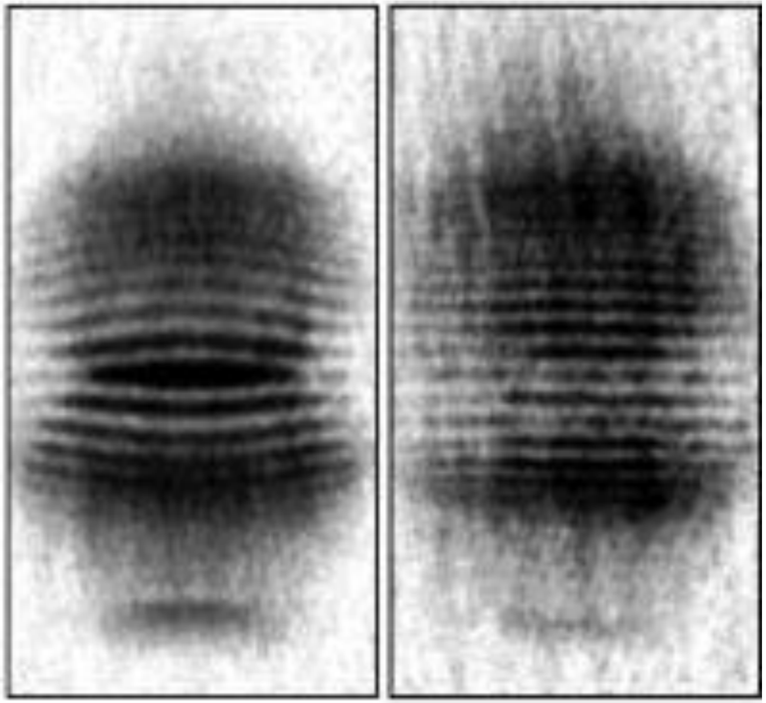
- **La figure d'interférence se construit petit à petit !** La densité de probabilité de présence traduit bien une probabilité de détection d'impacts

L'expérience des fentes d'Young

Interférences avec des neutrons



Interférences avec des atomes



QUESTIONS ?

- Quelques conséquences importantes de la relation de De Broglie :

$$|\psi\rangle = \int \overline{\psi}(\vec{p}) |\vec{p}\rangle d^3p \Rightarrow \qquad \psi(\vec{r}) = \langle \vec{r} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \int \overline{\psi}(\vec{p}) |\vec{p}\rangle d^3p$$

$$\psi(\vec{r}) = \int \overline{\psi}(\vec{p}) \langle \vec{r} | \vec{p} \rangle d^3p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \overline{\psi}(\vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right) d^3p$$

On montrerait facilement de même : $\overline{\psi}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right) d^3r$

$\psi(\vec{r})$ et $\overline{\psi}(\vec{p})$ sont **transformées de Fourier l'une de l'autre**.

La connaissance (ou la méconnaissance) d'une des deux grandeurs se déduit donc immédiatement de l'autre. Nous allons bientôt en voir une spectaculaire illustration qui a souvent fait fantasmer les auteurs de science-fiction.

- Une puissante conséquence de la dualité ondes-corpuscules : **la relation d'incertitude de Heisenberg**

  - Exemple d'un « paquet d'ondes » Gaussien. Il se trouve que la TF d'une Gaussienne (centrée) est une Gaussienne (centrée) :

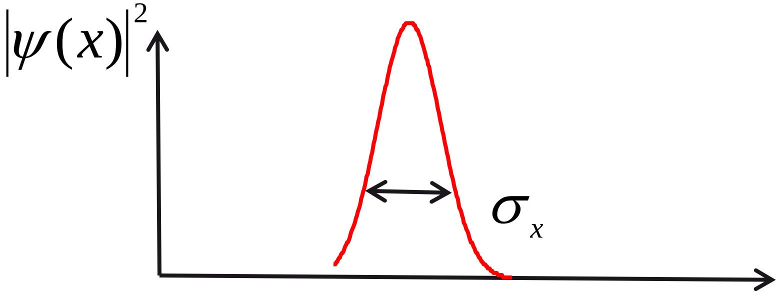
$$\psi(x) = (\pi\alpha)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2} \right) \qquad \overline{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2} \right)$$

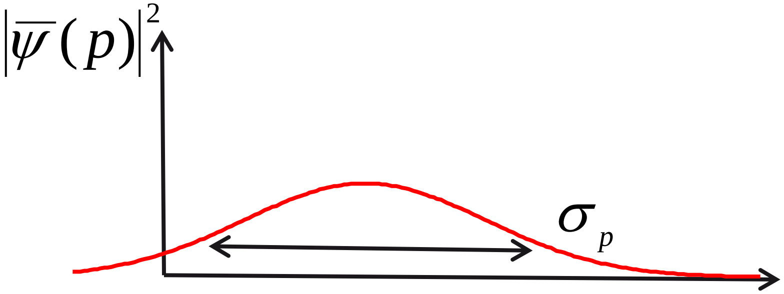
$$\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} p|\,\overline{\psi}(p)|^2 dp = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\,\overline{\psi}(p)|^2 dp = 1$$

$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \qquad \sigma_p = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2|\,\overline{\psi}(p)|^2 dp} = \frac{\hbar}{\alpha\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_x \cdot \sigma_P = \frac{\hbar}{2}$$

- Une puissante conséquence de la dualité ondes-corpuscules : **la relation d'incertitude de Heisenberg**
  - Exemple d'un « paquet d'ondes » Gaussien. Il se trouve que la TF d'une Gaussienne (centrée) est une Gaussienne (centrée) :

$$\psi(x) = (\pi\alpha)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \qquad \overline{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}\right)$$

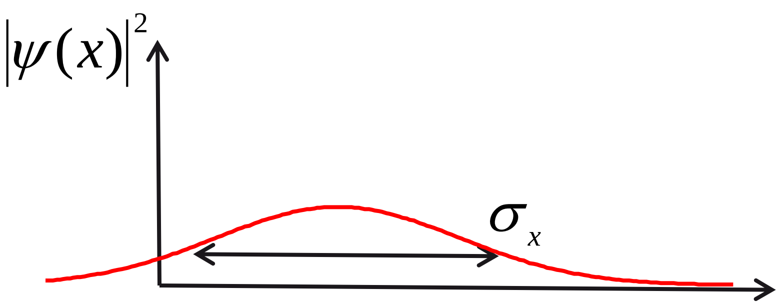


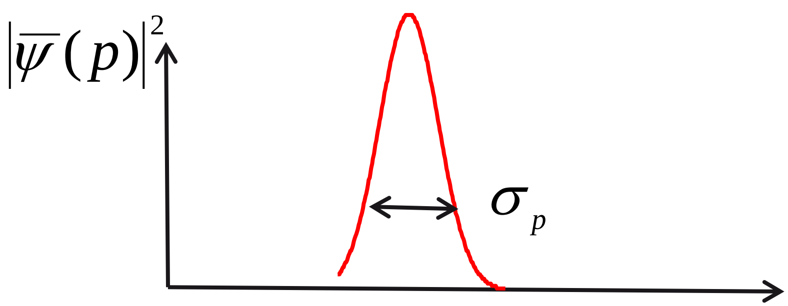


$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \qquad \sigma_p = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\overline{\psi}(p)|^2 dp} = \frac{\hbar}{\alpha\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x \cdot \sigma_P = \frac{\hbar}{2}$$

- Une puissante conséquence de la dualité ondes-corpuscules : **la relation d'incertitude de Heisenberg**
  - Exemple d'un « paquet d'ondes » Gaussien. Il se trouve que la TF d'une Gaussienne (centrée) est une Gaussienne (centrée) :

$$\psi(x) = (\pi\alpha)^{-1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\alpha^2}\right) \qquad \overline{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{-1/4} \exp\left(-\frac{\alpha^2 p^2}{2\hbar^2}\right)$$





$$\sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \qquad \sigma_p = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\overline{\psi}(p)|^2 dp} = \frac{\hbar}{\alpha\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \sigma_x \cdot \sigma_P = \frac{\hbar}{2}$$

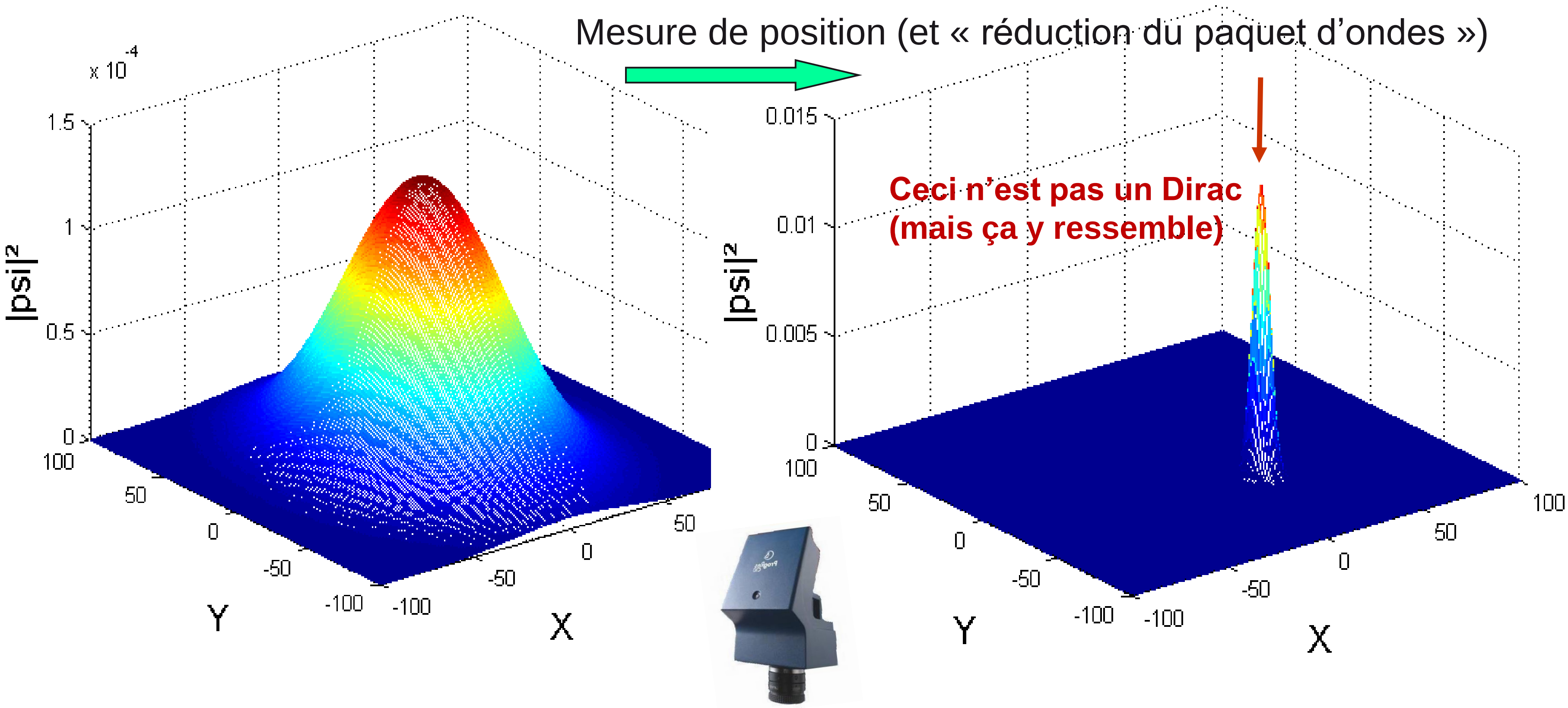
- Une puissante conséquence de la dualité ondes-corpuscules : **la relation d’incertitude de Heisenberg**

  - Dans le cas de ce paquet d’ondes Gaussien, la méconnaissance sur la position est exactement en proportion inverse de la méconnaissance en impulsion
  - Dans le cas général, c’est une inégalité : $\sigma_x \cdot \sigma_P \geq \frac{\hbar}{2}$

➔ La relation d’incertitude de Heisenberg exprime, qu’avant toute mesure, **si on connaît bien X on connaît mal P et vice-versa**

➔ Une mesure de P nous permet de **gagner de la connaissance sur P au prix de notre connaissance sur X, et vice-versa**

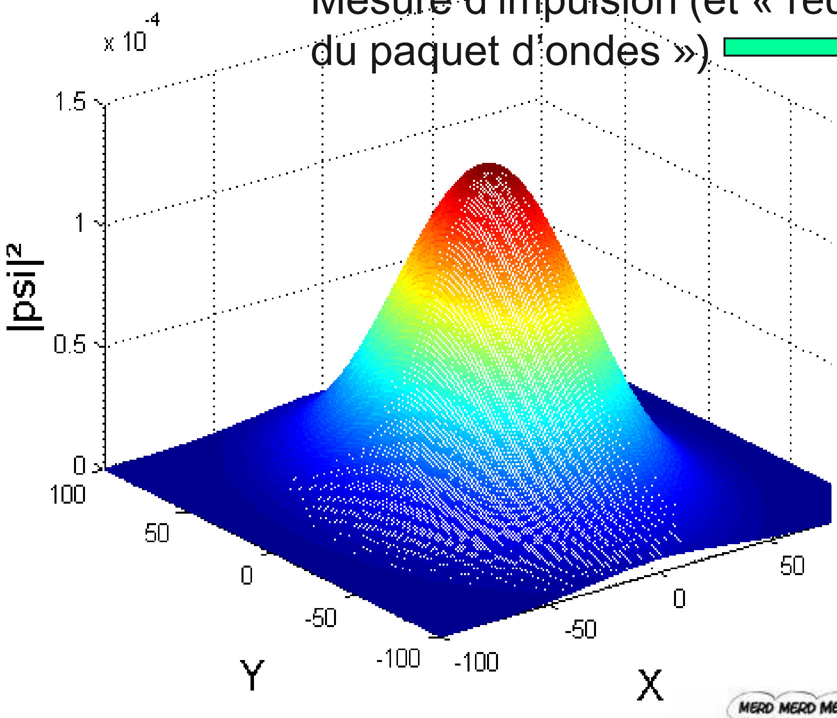
- Le caractère continu de la variable position nous **interdit une mesure infiniment précise**

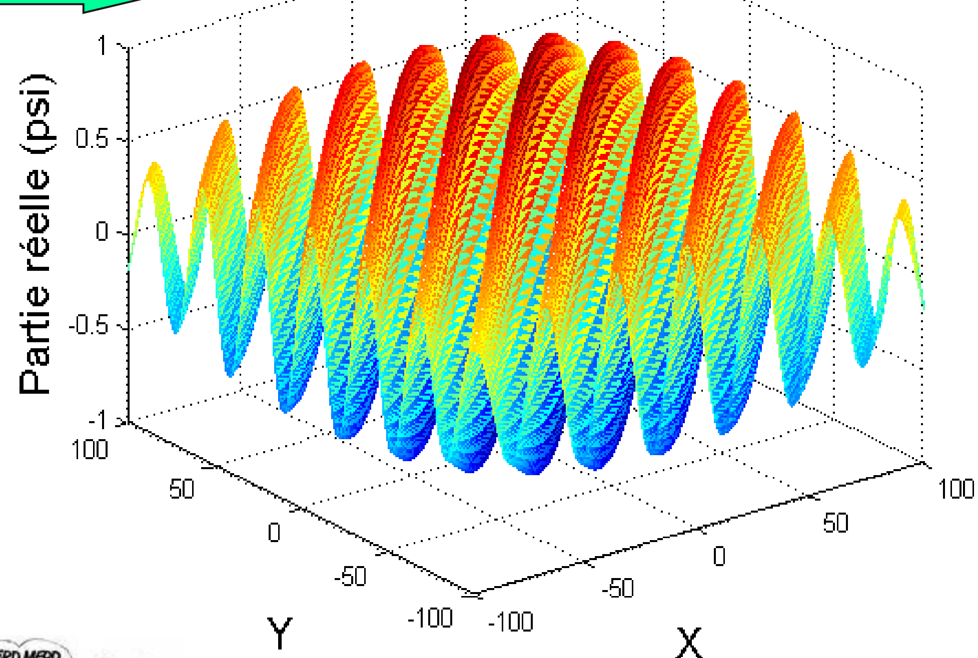


- Le caractère continu de la variable impulsion nous **interdit une mesure infiniment précise**

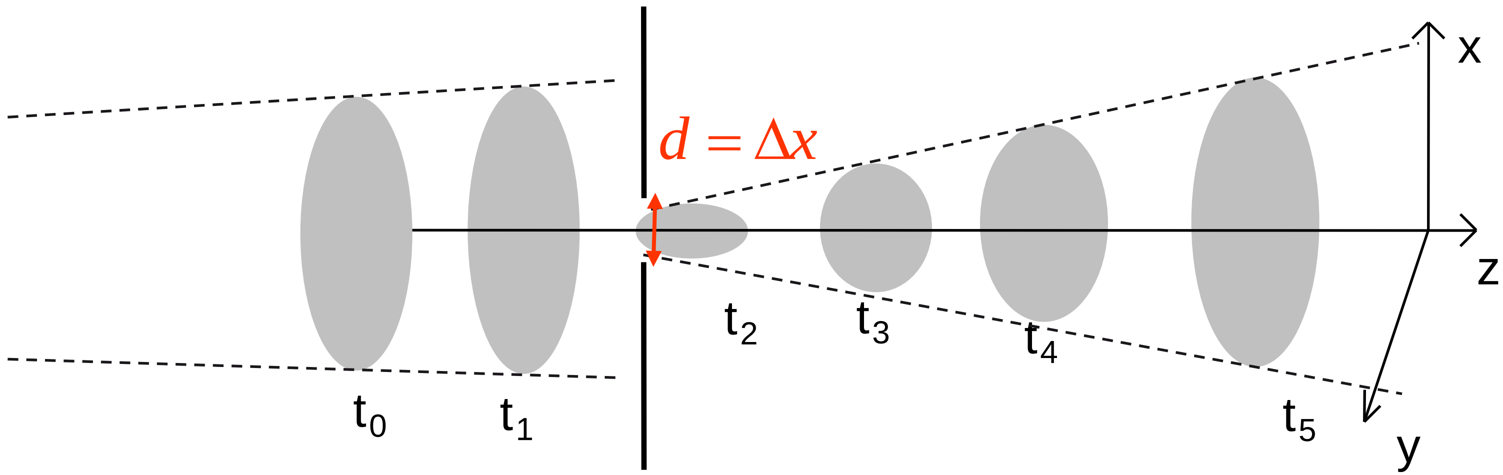
Mesure d'impulsion (et « réduction du paquet d'ondes »)

Ceci n'est pas une onde plane (mais ça y ressemble)

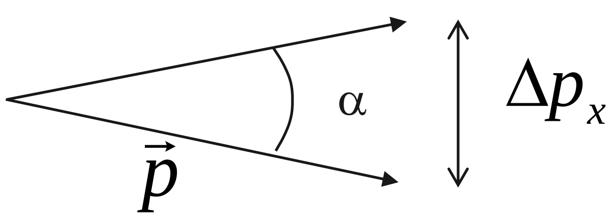




- Une illustration de la dualité ondes-corpuscules et de la relation d'incertitude de Heisenberg : la diffraction des particules



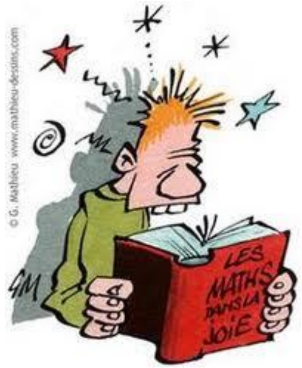
Localisation $\Rightarrow$ diffraction



- La relation d'incertitude de Heisenberg se démontre très aisément à partir de la définition explicite des opérateurs $\hat{\vec{R}}$ et $\hat{\vec{P}}$ (qu'on va voir)

- Elle se généralise à tout couple de grandeurs physiques dites « incompatibles »

- Pour le démontrer, et définir précisément la notion d'incompatibilité, on s'appuie sur les propriétés mathématiques des opérateurs, en particulier leur hermiticité. Dans le cadre de MNP, nous manipulerons un peu ces propriétés, mais pour les amateurs qui en redemandent (c'est un vrai plaisir) il faudra aller au-delà…



- Résumons :

  - Nous avons étudié l'application des principes aux grandeurs position et impulsion pour des particules
    - De façon générale, ces grandeurs admettent un **spectre de résultat de mesure continu**. Les **états propres correspondant ne sont pas réalisables physiquement**, car ils correspondraient à une mesure de précision infinie
    - Introduire une nature quantique pour les particules se traduit par la **relation de de Broglie**, qui permet de montrer que la fonction d'onde pour la position et son équivalent pour l'impulsion sont **transformées de Fourier l'une de l'autre**
    - Nous avons vu le lien entre la fonction d'onde et la densité de probabilité de présence, qui se traduit par une probabilité de détection d'impacts de particules
    - La dualité ondes-corpuscules amène à la **relation d'incertitude de Heisenberg**, qui exprime l'impossibilité de très bien connaître simultanément la position et l'impulsion d'une particule. **Une mesure permet de gagner de la connaissance sur l'une mais en fait perdre sur l'autre**

Les règles de quantification révélées

- Retour aux opérateurs $\hat{\vec{R}}$ et $\hat{\vec{P}}$. On a : $|\psi\rangle = \int \psi(\vec{r})|\vec{r}\rangle d^3r$

$$\hat{\vec{R}}|\psi\rangle = \hat{\vec{R}}\int \psi(\vec{r})|\vec{r}\rangle d^3r = \int \psi(\vec{r})\hat{\vec{R}}|\vec{r}\rangle d^3r = \int \psi(\vec{r})\vec{r}|\vec{r}\rangle d^3r$$

$$\langle \vec{r}|\hat{\vec{R}}|\psi\rangle = \langle \vec{r}|\int \psi(\vec{r}_0)\vec{r}_0|\vec{r}_0\rangle d^3r_0 = \int \psi(\vec{r}_0)\vec{r}_0\langle \vec{r}|\vec{r}_0\rangle d^3r_0$$

$$\langle \vec{r}|\hat{\vec{R}}|\psi\rangle = \int \psi(\vec{r}_0)\vec{r}_0\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)d^3r_0 = \vec{r}\,\psi(\vec{r})$$

$\hat{\vec{R}}$ **est un opérateur multiplicatif !** (en représentation R)

$$\hat{\vec{P}}|\psi\rangle = \hat{\vec{P}}\int \overline{\psi}(\vec{p})|\vec{p}\rangle d^3p = \int \overline{\psi}(\vec{p})\hat{\vec{P}}|\vec{p}\rangle d^3p = \int \overline{\psi}(\vec{p})\vec{p}|\vec{p}\rangle d^3p$$

$$\langle \vec{r}|\hat{\vec{P}}|\psi\rangle = \int \overline{\psi}(\vec{p})\vec{p}\langle \vec{r}|\vec{p}\rangle d^3p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \overline{\psi}(\vec{p})\vec{p}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)d^3p$$

$$\langle \vec{r}|\hat{\vec{P}}|\psi\rangle = -i\hbar\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\int \overline{\psi}(\vec{p})\vec{\nabla}\left\{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}\right)\right\}d^3p = -i\hbar\vec{\nabla}\,\psi(\vec{r})$$

$\hat{\vec{P}}$ **est un opérateur dérivatif !** (en représentation R)

Ce serait l'inverse en représentation P

Les règles de quantification révélées

- Un exemple important : **l'hamiltonien** (opérateur énergie totale)

  - Énergie cinétique ➔ $\dfrac{\hat{\vec{P}}^2}{2m}$ ➔ $\dfrac{\left(-i\hbar\vec{\nabla}\right)^2}{2m} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta$ (en représentation R)

  - Énergie potentielle ➔ $V\left(\hat{\vec{R}}\right)$ ➔ $V(\vec{r})$.

    (opérateur multiplicatif en représentation R)

D'où $\hat{H} = \dfrac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V\left(\hat{\vec{R}}\right)$ ➔ $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r})$. (en représentation R)

Les règles de quantification révélées

- On écrira donc l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\psi(\vec{r},t)}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\vec{r},t) + V(\vec{r}).\psi(\vec{r},t)$$

et l'équation à laquelle obéissent les états stationnaires :

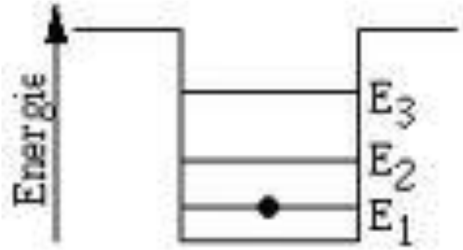
$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi_n(\vec{r}) + V(\vec{r}).\psi_n(\vec{r}) = E_n\psi_n(\vec{r})$$

qui ont pour dépendance temporelle (rappel) :

$$\psi_n(\vec{r},t) = \exp(-iE_n t/\hbar)\psi_n(\vec{r},0)$$

- Question : **où est la quantification dans tout ça** ? Le spectre des résultats possibles de R et P est continu. C'est un peu paradoxal alors qu'on parle de physique des discontinuités…

  R : il existe d'autres grandeurs physiques que R et P. On peut construire des grandeurs à partir de R et P (ex : l'énergie) pour lesquelles le spectre est discret. C'est le cas de l'énergie des électrons dans les atomes. Nous en verrons en TD une illustration très simplifiée dans le cas du puits quantique 1D



- Quelques exemples de manipulation des opérateurs pour calculer des quantités physiques

  - **Les valeurs moyennes**. Connaissant un état quantique $|\psi\rangle$, la valeur moyenne est l'espérance mathématique d'une grandeur physique prenant en compte les probabilités des divers résultats

$$\langle A\rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n \frac{\left|\langle\varphi_n|\psi\rangle\right|^2}{\langle\psi|\psi\rangle} = \sum_n a_n \frac{\langle\psi|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \sum_n \frac{\langle\psi|a_n|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Opérateur identité

$$\langle A\rangle = \sum_n \frac{\langle\psi|A|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|A\left(\sum_n |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\right)|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\psi|A|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

Une valeur moyenne peut se calculer très simplement par l'action de l'opérateur sur l'état quantique et produit scalaire avec l'état

- Quelques exemples de manipulation des opérateurs pour calculer des quantités physiques

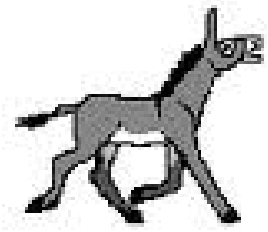
  - **La conjugaison hermitique**. Elle permet de calculer un produit scalaire où interviennent des opérateurs. Soit : $\left|\varphi_1\right\rangle = \left(A+\alpha B\right)\left|\psi_1\right\rangle$ et $\left|\varphi_2\right\rangle = \left(C+\beta D\right)\left|\psi_2\right\rangle$

    Comment calculer $\left\langle\varphi_2\middle|\varphi_1\right\rangle$?

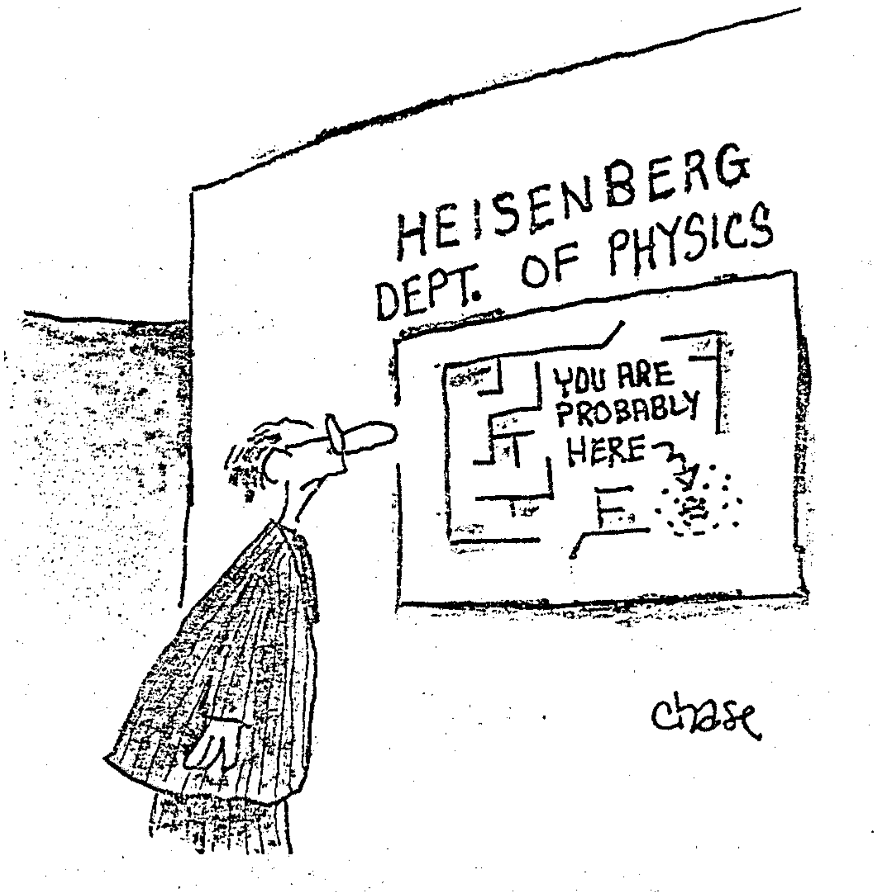
    On calcule le conjugué hermitique de $\left|\varphi_2\right\rangle$: $\left\langle\varphi_2\right| = \left\langle\psi_2\right|\left(C^+ + \beta^* D^+\right)$

    Ensuite $\left\langle\varphi_2\middle|\varphi_1\right\rangle = \left\langle\psi_2\right|\left(C^+ + \beta^* D^+\right)\left(A+\alpha B\right)\left|\psi_1\right\rangle$

    …



- **C'est probablement tout pour aujourd'hui !**



Contexte académique } **sans modifications**