Formation LIESSE
Temps-échelle, ondelettes et auto-similarité

François Roueff
http://www.tsi.enst.fr/~roueff

29 octobre 2012

Plan

Espace L^2

Définition

On note L^2 l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{C}$ telles que

$$\|f\|_2^2 = \int |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t < \infty \, .$$

On précisera $L^2(E)$ si l'intégrale est prise sur un sous-ensemble E au lieu de $\mathbb{R}^p$ en entier ou $L^2(\nu)$ si la mesure de Lebesgue $\mathrm{d}t$ est remplacée par $\nu(\mathrm{d}t)$.

Convention

On ne fait pas ici de distinction formelle entre la *fonction* f et la classe d'équivalence associée pour la relation d'égalité presque partout (ou ν-presque partout).

Espace L^2 : propriétés

Espace normé complet

Comme tout espace L^p, $1 \leq p \leq \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f(t)|^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} ,$$

L^2 est un espace normé complet.

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_2 < \infty \Rightarrow \exists f \in L^2, \sum_{k=1}^{n} f_k \xrightarrow{L^2} f =: \sum_{k=1}^{\infty} f_k ,$$

où $\xrightarrow{L^p}$ dénote la convergence associée à la norme L^p.

Espace L^2 : propriétés (suite)

Structure hilbertienne

L^2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$< f, g >= \int f(t) g^*(t) \mathrm{d}t$$

$$\text{ou} \quad < f, g >_p = \int_{\mathbb{R}^p} f(t) g^*(t) \mathrm{d}t$$

$$\text{ou} \quad < f, g >_\nu = \int f(t) g^*(t) \nu(\mathrm{d}t) \ .$$

Espace séparable

Il existe une famille dénombrable (g_k) telle que $L^2 = \overline{\mathrm{Vect}}(g_k)$: on dit que c'est un espace de Hilbert séparable.

Structure hilbertienne

Projection orthogonale

Pour tout convexe fermé $E \subset L^2$ et tout $f \in L^2$, il existe un unique $g \in E$ tel que

$$\|f - g\|_2 = \inf_{h \in E} \|f - h\|_2 \ .$$

Base orthonormée

On peut décomposer f sous la forme

$$f = \sum_k < f, e_k > \ e_k \ ,$$

où (e_k) est une base orthonormée (au sens hilbertien) de L^2.

Exemple de base orthonormée de L^2

On note

$$g_{k,l}(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k t} \mathbb{1}_{[l,l+1)}(t), \quad k, l \in \mathbb{Z} \ , \tag{1}$$

les fonctions exponentielles complexes de fréquence k localisée sur $[l, l+1)$.

On vérifie que $(g_{k,l})$ est une famille orthonormée de L^2.

Comme $\{g_{k,l},\, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base de $L^2(l, l+1)$ pour tout l et

$$\sum_{l=-n}^{n} f \mathbb{1}_{[l,l+1)} \xrightarrow{L^2} f \ ,$$

on en déduit que $\overline{\mathrm{Vect}}(g_{k,l},\, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}) = L^2$.

Transformée de Fourier de L^2

La transformée de Fourier sera normalisée de telle façon qu'elle opère de $L^2(\mathbb{R}^p)$ dans lui-même de façon isométrique :

$$\widehat{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega^T t}\, \mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R}^p . \tag{2}$$

Précisions

L'intégrale (2) n'a de sens que si $f \in L^1$. Cette notation est cependant généralement admise pour $f \in L^2$ mais l'on préférera écrire $\widehat{f} = \mathcal{F}(f)$. De même, on notera par $\overline{\mathcal{F}}(f)$ la transformée de Fourier inverse, qui est l'isométrie sur L^2 définie pour $f \in L^1$ par

$$\check{f}(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega^T t}\, \mathrm{d}t, \quad \omega \in \mathbb{R}^p . \tag{3}$$

On a alors $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = I$ sur L^2.

Transformée de Fourier de L^2 (suite)

Convention et notation "signal"

Pour un signal temporel $x \in L^2(\mathbb{R})$, il est plus courant de définir et de noter la transformée de Fourier de x par

$$X(f) = \int x(t)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi f t}\,\mathrm{d}t, \quad f \in \mathbb{R}$$

et la formule inverse

$$x(t) = \int X(f)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f t}\,\mathrm{d}f, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Temps et fréquence moyenne

Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. On remarque que $|x(t)|^2/\|x\|_2^2$ est positif pour tout t et intègre à un. Autrement dit, c'est une densité (au sens probabiliste) sur la droite réelle, c'est à dire le temps et l'on peut définir le temps de vie moyen du signal x par :

$$\mathbf{t} = \int t \, \frac{|x(t)|^2}{\|x\|_2^2} \, dt.$$

De même, $|X(f)|^2/\|X\|_2^2$ est une densité sur la fréquence et l'on peut définir la fréquence moyenne du signal x par :

$$\boldsymbol{\xi} = \int f \, \frac{|X(f)|^2}{\|X\|_2^2} \, df.$$

Autrement dit, $\mathbf{t}$ et $\boldsymbol{\xi}$ sont le temps et la fréquence autour duquel se répartit l'énergie du signal x.

Remarque

Par isométrie, les normalisations $\|x\|_2$ et $\|X\|_2$ sont identiques.

Boîte temps-fréquence

Une autre information intéressante consiste à évaluer la dispersion de cette énergie autour du temps $\mathbf{t}$ et de la fréquence $\boldsymbol{\xi}$.

1. Variance temporelle :

$$\boldsymbol{\sigma}_t^2 = \int (t - \mathbf{t})^2 \frac{|x(t)|^2}{\|x\|_2^2} \, dt,$$

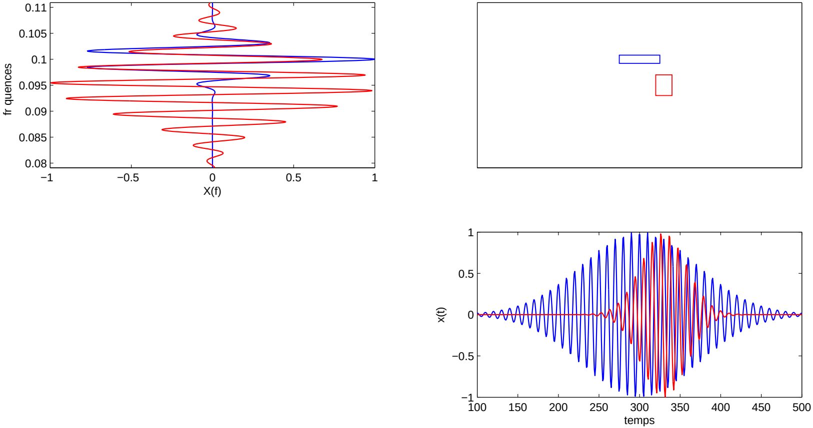
2. Variance fréquentielle :

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi^2 = \int (f - \boldsymbol{\xi})^2 \frac{|X(f)|^2}{\|X\|_2^2} \, df.$$

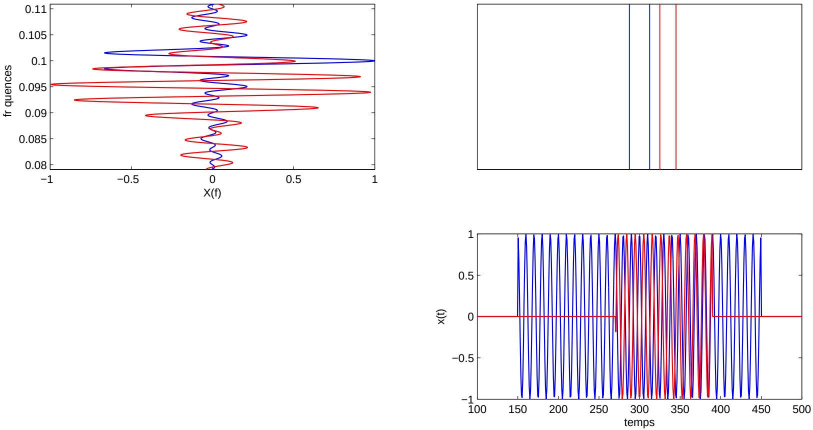
Définition

On appelle boîte temps-fréquence du signal x le pavé du plan temps-fréquence centré en $(\mathbf{t}, \boldsymbol{\xi})$, de largeur $\boldsymbol{\sigma}_t$ et de hauteur $\boldsymbol{\sigma}_\xi$.

Boîte temps-fréquence d'une fenêtre gaussienne



Boîte temps-fréquence d'une fenêtre rectangle



Principe d'incertitude

Théorème

On a l'inégalité suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\sigma}_\xi \geq \frac{1}{4\pi}. \tag{4}$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x(t+\mathbf{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\boldsymbol{\xi}t}$ est une fonction gaussienne centrée, c'est-à-dire,

$$x(t) = \frac{\|x\|_2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\boldsymbol{\xi}t}}{(2\pi\boldsymbol{\sigma}_t^2)^{\frac{1}{4}}} \, \mathrm{e}^{-(t-\mathbf{t})^2/4\boldsymbol{\sigma}_t^2}.$$

Principe d'incertitude (suite)

Preuve

On suppose $\boldsymbol{\sigma}_t < \infty$ et $\boldsymbol{\sigma}_\xi < \infty$, $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{t} = 0$ et $\|x\|_2 = 1$. Dans ce cas, on peut montrer que $\dot{x} \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[\dot{x}](f) = 2\mathrm{i}\pi f\, X(f)$ et $t|x(t)|^2$ tend vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$. En utilisant l'inégalité de Schwartz et l'égalité de Parseval, on obtient

$$\left| \int t\, x(t) \dot{x}^*(t)]\, dt \right| \leq 2\pi \boldsymbol{\sigma}_t \boldsymbol{\sigma}_\xi \ .$$

D'autre part $t|x(t)|^2$ a pour dérivée

$$|x(t)|^2 + t\, x(t)\dot{x}^*(t) + t\, x^*(t)\dot{x}(t) \ .$$

D'où (4).
Pour avoir l'égalité, il faut $t\, x(t)$ proportionnel à $\dot{x}$, ce qui n'arrive que pour les fonctions gaussienne.

Transformées par famille analysante

Soit $(\theta_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille d'éléments normalisés ($\|\theta_\gamma\|_2 = 1$) de $L^2(\mathbb{R})$, où Γ est un espace muni d'une mesure (positive) μ. On munit $L^2(\mu)$ du produit scalaire

$$< x, y >_\mu = \int_\Gamma x(\gamma) y^*(\gamma)\, \mu(\mathrm{d}\gamma).$$

Γ peut être discret ou non (transformée continue).
On considère la transformée linéaire $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mu)$ qui à x associe les produits scalaires $< x, \theta_\gamma >$:

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad [Tx](\gamma) = < x, \theta_\gamma > .$$

Remarque

Contrairement à l'analyse de Fourier, on a $\theta_\gamma \in L^2$ et donc $[Tx](\gamma)$ est défini pour tout γ.

Transformées par famille analysante (suite)

Questions importantes

1. A-t-on continuité de l'opérateur T ?
2. A-t-on injectivité ? Si oui, la formule de reconstruction

$$x(t) = < Tx, \theta^*_{\cdot}(t) >_\mu$$

   est-elle valable ?
3. A-t-on isométrie de T ? Si c'est le cas, la continuité et l'injectivité de T en découlent.
4. Comment interpréter Tx dans le plan temps-fréquence ?
5. A-t-on $T(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mu)$?

Description du plan temps–fréquence

On pose $\Gamma = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Soit $g \in L^2$, $\|g\|_2 = 1$ et

$$\forall \gamma = (t_0, f_0) \in \Gamma, \forall t \in \mathbb{R}, \; \theta_\gamma(t) = g(t - t_0)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_0 t}.$$

La fonction g s'appelle fenêtre ou enveloppe et possède en général des propriétés particulières. On la prend généralement symétrique et réelle et bien localisée en temps et en fréquence, elle vérifie donc

$$\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\sigma}_\xi < \infty, \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\xi} = 0 \; .$$

Il s'en suit que pour $\gamma = (t_0, f_0)$, θ_γ vérifie

$$\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\sigma}_\xi < \infty \text{ indép. de } \gamma, \quad \mathbf{t} = t_0, \; \boldsymbol{\xi} = f_0 \; .$$

Autrement dit, la boîte temps-fréquence est translatée autour du point (t_0, f_0).

Formule d'analyse

La transformée T pour cette famille de fonctions analysantes s'appelle une transformée de Fourier à fenêtre (T.F.F.). Elle est définie par :

$$Tx(t_0, f_0) = \int x(t) g^*(t - t_0)\, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi f_0 t}\, \mathrm{d}t. \tag{5}$$

Le module de la T.F.F. $|Tx(t_0, f_0)|$ est appelée le spectrogramme du signal x.

Théorème

La T.F.F. est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$:

$$\forall x, y \in L^2(\mathbb{R}), \quad < x, y >_1 = < Tx, Ty >_2 \ .$$

Formule d'analyse (isométrie)

Preuve

Comme $[(t, t_0) \mapsto x(t)g^*(t - t_0)] \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on a pour presque tout t_0, $[t \mapsto x(t)g^*(t - t_0)] \in L^2$ et donc

$$f_0 \mapsto < x, \theta_{t_0,f_0} > = \int x(t)g^*(t - t_0)e^{-2i\pi f_0 t}\,\mathrm{d}t$$

est égal à $\mathcal{F}\,[t \mapsto x(t)g^*(t - t_0)]$. L'égalité de Parseval donne alors

$$\int | < x, \theta_{t_0,f_0} > |^2\,\mathrm{d}f_0 = \int |x(t)g^*(t - t_0)|^2\,\mathrm{d}t.$$

Et, par conséquent, en utilisant Fubini et $\|g\|_2 = 1$,

$$\int | < x, \theta_{t_0,f_0} > |^2\,\mathrm{d}t_0\mathrm{d}f_0 = \|x\|_2^2\ .$$

Formule de reconstruction

Il suit de l'isométrie que la T.F.F. est un opérateur linéaire injectif continu. On considère la formule de reconstruction suivante :

$$
\begin{aligned}
x(t) &= < Tx, \theta^*_{\bullet}(t) >_\mu \\
&= \int Tx(t_0, f_0)\, g(t - t_0)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f_0 t}\, \mathrm{d}t_0 \mathrm{d}f_0 \,. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

La première formule est incorrecte car $[\gamma \mapsto \theta^*_\gamma(t)] \notin L^2(\mu)$! La seconde formule s'applique si on impose des conditions sur x (cf. Fourier) comme dans l'énoncé suivant.

Reconstruction en tout point

Supposons que $g, X \in L^1$. Alors la formule de reconstruction (6) est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Formule de reconstruction (suite)

Preuve de la reconstruction en tout point

Par Parseval, on a pour tout (t_0, f_0),

$$Tx(t_0, f_0) = \int X(f) G^*(f - f_0) e^{2i\pi f t_0} \, \mathrm{d}f \ ,$$

Comme $\|Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 < \infty$, par Fubini, $t_0 \mapsto Tx(t_0, f_0)$ est une fonction de L^2 pour presque tout $f_0 \in \mathbb{R}$, auquel cas on a $\mathcal{F}[t_0 \mapsto Tx(t_0, f_0)] = [f \mapsto X(f + f_0) G^*(f)]$ et, par Plancherel,

$$\int Tx(t_0, f_0) \, g(t - t_0) \, \mathrm{d}t_0 = \int X(f + f_0) \ |G(f)|^2 \ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f t} \mathrm{d}f.$$

Par Fubini, pour $X \in L^1$, il en résulte

$$\int \left(\int X(f + f_0) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi (f + f_0) t} \mathrm{d}f_0 \right) |G(f)|^2 \ \mathrm{d}f = x(t) \ .$$

Surjectivité

T n'est pas une bijection isométrique entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R}^2)$.
En effet, par Cauchy-Schwarz, comme $\|g\|_2 = 1$,

$$\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_2 < \infty \ .$$

On dit qu'il y a redondance de la représentation temps-fréquence continue.

Noyau auto–reproduisant

Soit $\gamma = (t_0, f_0)$ et $\gamma' = (u, \xi)$. On définit

$$\begin{aligned} K(\gamma, \gamma') &= < \theta_{\gamma'}, \theta_\gamma > \\ &= \int g(t-u) g^*(t-t_0)\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t(\xi - f_0)} \mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

Surjectivité (suite)

D'après la formule de reconstruction (on omet les problèmes d'intégrabilité),

$$\begin{aligned} Tx(t_0, f_0) &= << Tx, \theta^*_{\bullet}(\bullet) >_\mu, \theta_{t_0,f_0} > \\ &= \int \left(\int Tx(u,\xi) g(t-u) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi t} \, \mathrm{d}u \mathrm{d}\xi \right) g^*(t-t_0) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi f_0 t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int Tx(u,\xi) K(t_0, f_0, u, \xi) \, \mathrm{d}u \mathrm{d}\xi \, . \end{aligned}$$

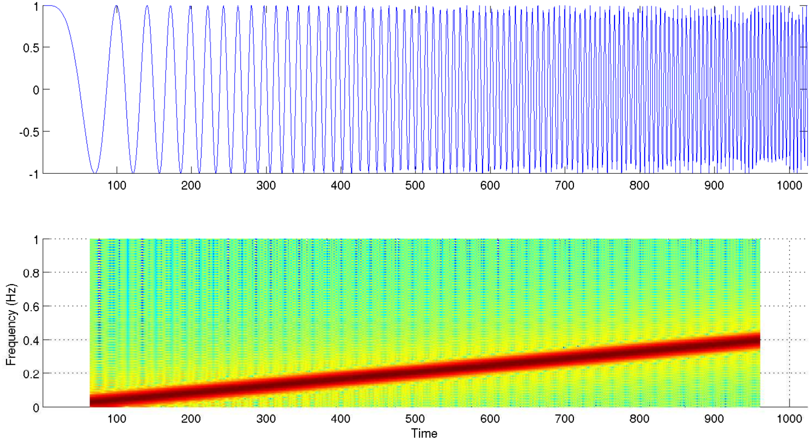
En fait cette relation caractérise $T(L^2)$:

Caractérisation de $T(L^2)$

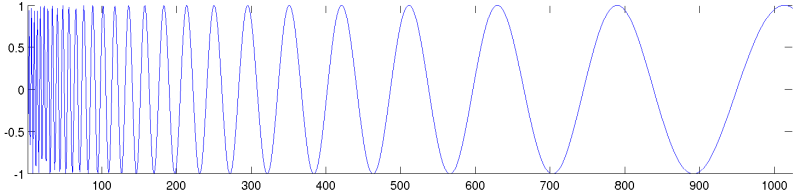
$A \in T(L^2)$ ssi

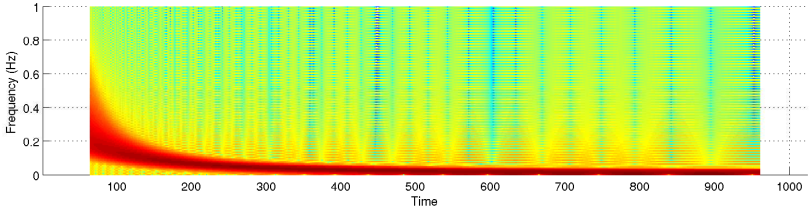
$$A(t_0, f_0) = \int A(u,\xi) K(t_0, f_0, u, \xi) \, \mathrm{d}u \mathrm{d}\xi \, .$$

Exemple : T.F.F. d'une fréquence évoluant linéairement

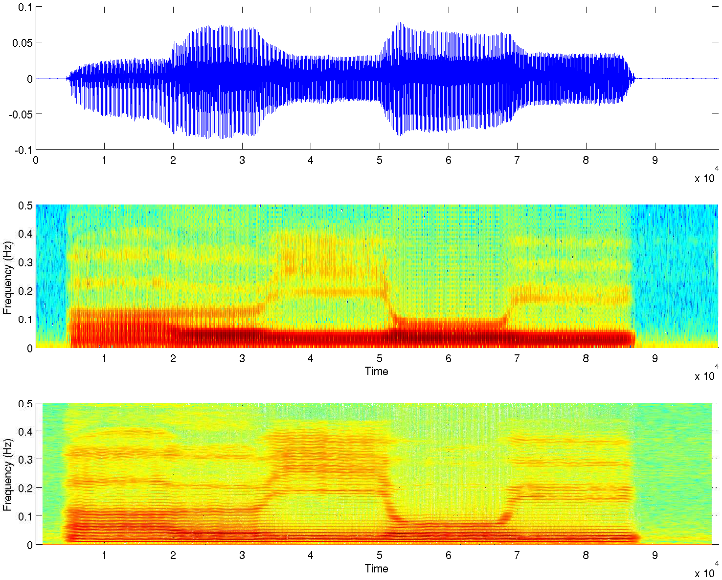


Exemple : T.F.F. d'une fréquence évoluant hyperboliquement

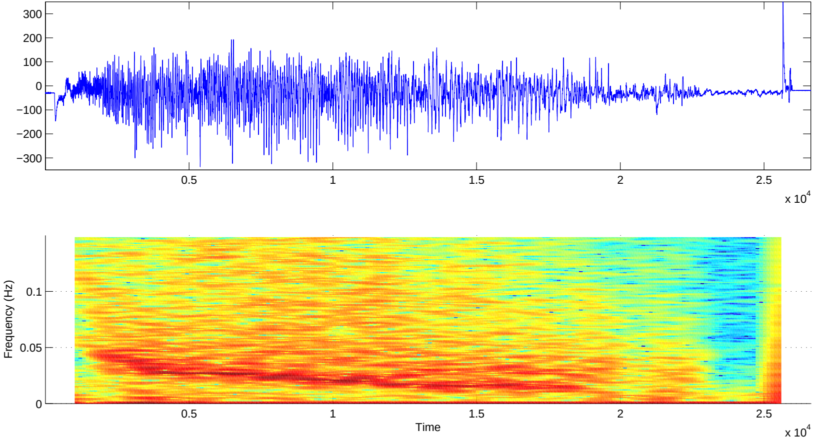




Exemple : T.F.F. de “aeiou”



Exemple : T.F.F. d'un eeg lors d'une crise d'épilepsie



Compléments

1. Pour $\Gamma_0 = \mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ et g bien choisie, la T.F.F. réduite à $\gamma \in \Gamma_0$ fournit une base orthonormée de L^2 (cf. (1)).
2. Mais le théorème de Balian-Low montre qu'une telle fonction ne peut être bien localisée en temps et en fréquence : $\boldsymbol{\sigma}_t$ ou $\boldsymbol{\sigma}_\xi = \infty$.
3. Des bases bien localisée en temps et en fréquence proche d'une T.F.F. discrète (contraintes de symétrie et recouvrements), par exemple la base de cosinus locaux utilisée en codage de la parole.
4. La T.F.F. s'adapte facilement au temps discret (FFT successives). Les bases de cosinus bien localisées ont aussi une version discrète : les bases d'ondelettes de Malvar.
5. La distribution de Wigner–Ville, lissé ou non, est une représentation temps-fréquence quadratique qui peut servir d'alternative au spectrogramme.

du temps–fréquence au temps–échelle

Pour l'analyse temps-échelle, on pose $\Gamma = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Soit $\psi \in L^2$, $\|\psi\|_2 = 1$ et

$$\forall \gamma = (a, b) \in \Gamma,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \theta_\gamma(t) = \psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

La fonction ψ est prise réelle, s'appelle une ondelette et doit vérifier $\psi \in L^1$ et

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{|\Psi(f)|^2}{f} \, \mathrm{d}f < \infty\,, \tag{7}$$

ce qui entraîne

$$\int \psi(t) \, \mathrm{d}t = 0\,.$$

On dit que ψ un moment nul.

Description du plan temps-fréquence

On suppose ψ bien localisée en temps et en fréquence,

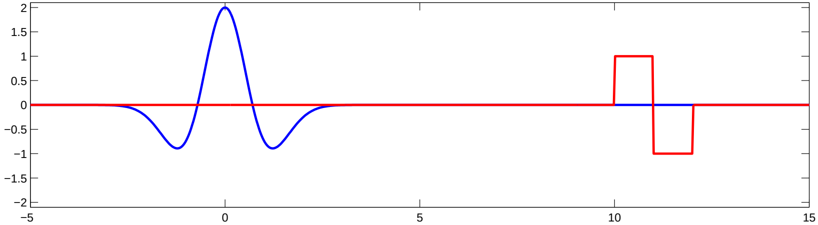
$$\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\sigma}_\xi < \infty \ .$$

Il s'en suit que pour $\gamma = (a, b)$, θ_γ vérifie

$$\mathbf{t}_{(a,b)} = b + a\mathbf{t}_{(1,0)}, \ \boldsymbol{\xi}_{(a,b)} = a^{-1}\boldsymbol{\xi}_{(1,0)},$$
$$\boldsymbol{\sigma}_{t\,(a,b)} = a\boldsymbol{\sigma}_{t\,(1,0)} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\xi\,(a,b)} = a^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{\xi\,(1,0)} \ .$$

Autrement dit, la boîte temps-fréquence en $\gamma = (a, b)$ est translatée autour du point $(b + a\mathbf{t}_{(1,0)}, a^{-1}\boldsymbol{\xi}_{(1,0)})$ avec une largeur proportionnelle à a et une hauteur proportionnelle à a^{-1}.

Exemples d'ondelettes



1. $\psi_n =$ dérivée n-ème d'une gaussienne pour tout $n \geq 1$; alors (7) est vérifiée et ψ a n moments nuls :

$$\int \psi_n(t)p(t)\,dt = 0 \text{ pour tout polynôme } p \text{ de degré au plus } n-1,$$

2. L'ondelette de Haar $\psi_{\mathcal{H}}(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{(0,1/2]}$ a un support compact : elle est bien localisé en temps, mais n'est pas continue (mauvaise localisation en fréquence) et n'a qu'un moment nul.

Formule d'analyse

Définition

La transformation T définie avec $(\theta_\gamma) = (\psi_{a,b})$ est appelée Transformée en Ondelette Continue (T.O.C.).

Elle est définie par :

$$Tx(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t)\psi^* \left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t. \tag{8}$$

Le module de la T.O.C. s'appelle le scalogramme de x.

Théorème

La T.O.C. est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mu)$

$$\forall x, y \in L^2(\mathbb{R}), \quad < x, y >_1 = < Tx, Ty >_\mu ,$$

avec $\mu(\mathrm{d}a, \mathrm{d}b) = (C_\psi a^2)^{-1} \mathrm{d}a\mathrm{d}b$.

Formule d'analyse (isométrie)

Preuve

La formule de Parseval implique

$$\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, Tx(a,b) = \sqrt{a} \int X(f)\Psi^\star(af)\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi b f}\,\mathrm{d}f. \qquad (9)$$

Pour tout $f \neq 0$, on a $\int_0^\infty |\Psi^\star(af)|^2\ a^{-1}\mathrm{d}a = C_\psi < \infty$. Donc $\int |X(f)\Psi^\star(af)|^2\ a^{-1}\mathrm{d}a\mathrm{d}f < \infty$ et, presque tout $a > 0$, $[f \mapsto X(f)\Psi^\star(af)] \in L^2$. Par Plancherel on obtient :

$$\int |Tx(a,b)|^2\ \mathrm{d}b = a \int |X(f)\Psi^\star(af)|^2\ \mathrm{d}f.$$

Il s'en suit la relation d'isométrie :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} |Tx(a,b)|^2\ \frac{\mathrm{d}a}{a^2}\mathrm{d}b = C_\psi \|x\|_2^2.$$

Formule de reconstruction

Du fait de l'isométrie, la T.O.C. est un opérateur linéaire injectif continu. On peut montrer la formule de reconstruction suivante.

$$\begin{aligned} x(t) &= < Tx, \theta^*_\cdot(t) >_\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}} Tx(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \mu(\mathrm{d}a, \mathrm{d}b). \end{aligned} \tag{10}$$

Comme pour la T.F.F. la première formule est purement "formelle" et la seconde formule s'applique si on impose des conditions sur x comme dans l'énoncé suivant.

Reconstruction en tout point

Supposons que $X \in L^1$. Alors la formule de reconstruction (10) est valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Formule de reconstruction (suite)

Preuve de la reconstruction en tout point

On a vu que $[b \mapsto Tx(a,b)] \in L^2$ pour presque tout a et

$$\mathcal{F}[b \mapsto Tx(a,b)] = f \mapsto \sqrt{a} X(f) \Psi^\star(af).$$

Donc, en appliquant Parseval,

$$\int_{\mathbb{R}} Tx(b,a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a}) \, \mathrm{d}b = \int_{\mathbb{R}} a X(f) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f t} \left|\Psi(af)\right|^2 \, \mathrm{d}f.$$

Comme $X \in L^1$, on obtient par Fubini :

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}} Tx(b,a) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi(\frac{t-b}{a}) \, \frac{\mathrm{d}a}{a^2} \mathrm{d}b = C_\psi \int_{\mathbb{R}} X(f) \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi f t} \, \mathrm{d}f = C_\psi x(t).$$

Surjectivité

Comme pour la T.F.F., on a par Cauchy-Schwarz, comme $\|\psi\|_2 = 1$,

$$\|Tx\|_\infty \leq \|x\|_2 < \infty \ .$$

et donc T n'est pas une bijection isométrique entre $L^2(\mathbb{R})$ et $L^2(\mu)$: il y a redondance de la transformée en ondelette continue.

Noyau auto–reproduisant

Soit $\gamma = (a, b)$ et $\gamma' = (\alpha, \beta)$. On définit

$$\begin{aligned} K(\gamma, \gamma') &= < \theta_{\gamma'}, \theta_\gamma > \\ &= a \int \psi(\frac{t-\beta}{\alpha})\psi^*(\frac{t-b}{a}) \, \mathrm{d}t \ . \end{aligned}$$

Surjectivité (suite)

D'après la formule de reconstruction (on omet les problèmes d'intégrabilité),

$$\begin{aligned} Tx(a,b) &= << Tx, \theta^*_{\cdot}(\cdot) >_\mu, \theta_{a,b} > \\ &= \int \left(\int Tx(\alpha,\beta)\psi(\frac{t-\beta}{\alpha})\ \mu(\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta) \right) \psi^*(\frac{t-b}{a})\ \mathrm{d}t \\ &= \int Tx(\alpha,\beta)K(a,b,\alpha,\beta)\ \mu(\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta);. \end{aligned}$$

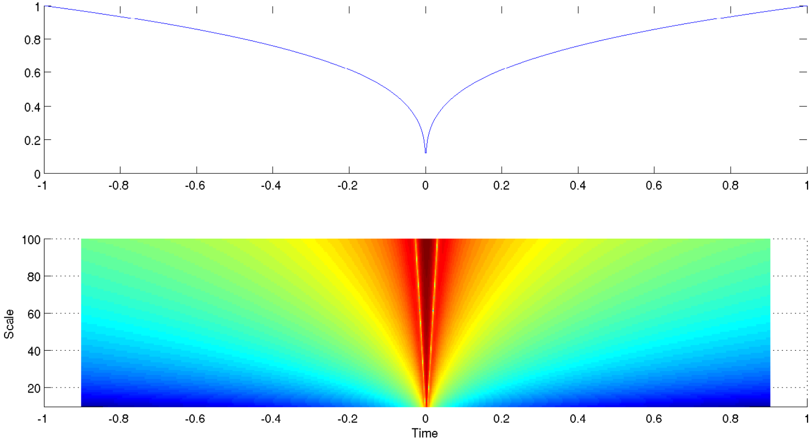
En fait cette relation caractérise $T(L^2)$:

Caractérisation de $T(L^2)$

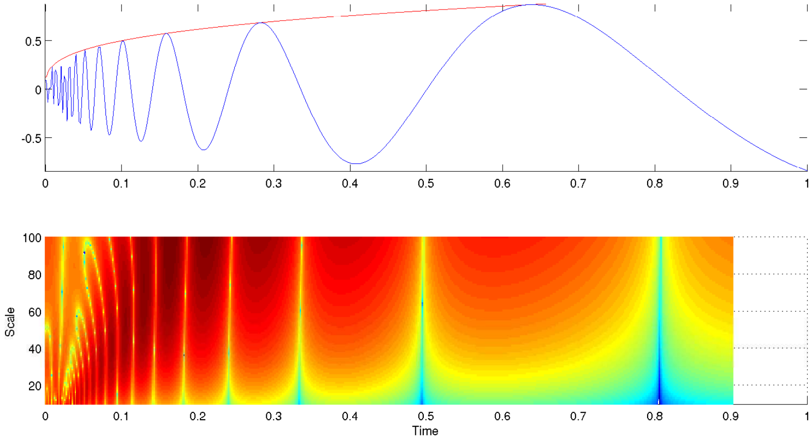
$A \in T(L^2)$ ssi

$$A(a,b) = \int A(\alpha,\beta)K(a,b,\alpha,\beta)\ \mu(\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta);.$$

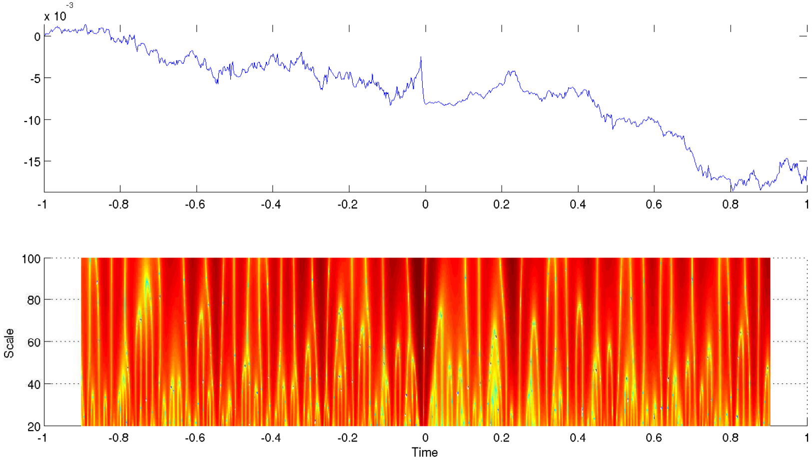
Exemple : T.O.C. d'une "singularité simple" (cusp)



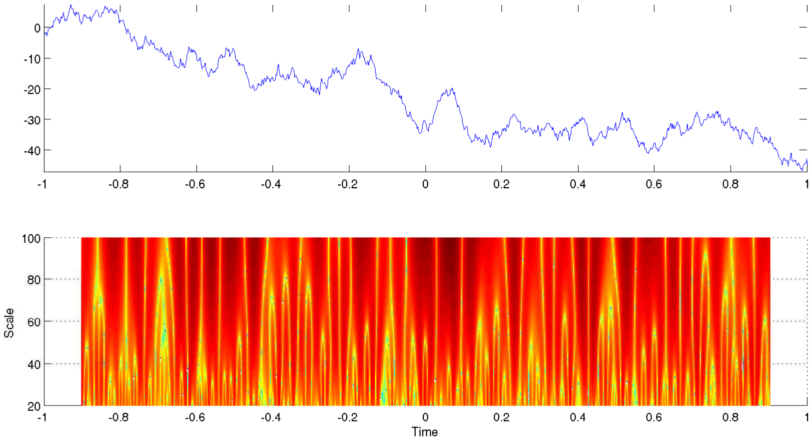
Exemple : T.O.C. d'une "singularité oscillante" (chirp)



Exemple : T.O.C. d'une fonction "partout irrégulière" (série de Fourier lacunaire randomisée)



Exemple : T.O.C. du mouvement brownien



Compléments

1. Pour $\Gamma_0 = \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \subset \Gamma$ et ψ bien choisie, la T.O.C. réduite à $\gamma \in \Gamma_0$ fournit une base orthonormée de L^2.
2. La première base ainsi obtenue est ancienne, il s'agit de la base de Haar. De façon surprenante, la construction de telles bases avec ψ bien localisée en temps et en fréquence est assez récente.
3. Les bases obtenues sont beaucoup utilisées en codage des images fixes ou vidéo (JPEG2000 et descendants). L'adaptation à $L^2(\mathbb{R}^2)$ est en effet très simple.
4. Nous verrons la construction des bases d'ondelettes dans la partie suivante.
5. La T.O.C. s'adapte facilement au temps discret (convolutions discrètes). Les bases d'ondelettes s'y adaptent aussi avec une étape d'interpolation "embarquée".

Bases au sens hilbertien

Définition

Soit $(H, <,>)$ un espace de Hilbert. Une base orthogonale hilbertienne est une famille dénombrable dense (e_k) telle que

$$< e_k, e_l >= 0 \quad \text{pour} \quad k \neq l \ .$$

Elle est orthonormée (au sens hilbertien) si de plus

$$\|e_k\|_2 = 1 \quad \text{pour} \quad k \ .$$

Alors, pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_k < x, e_k > e_k \ , \tag{11}$$

où la convergence de la série est inconditionnelle dans H.

Autrement dit, $T : x \mapsto (< x, e_k >)_k$ est une isométrie linéaire de H dans ℓ^2 et (11) est une formule de reconstruction.
On en déduit :

Théorème

Tout espace de Hilbert séparable est homéomorphe à ℓ^2.

Le choix de la base (e_k) et la numérotation est néanmoins primordial pour la vitesse de convergence de l'approximation

$$\sum_{|k|<n} < x, e_k > e_k \quad \text{vers} \quad x \ .$$

c'est-à-dire de

$$\left(\sum_{|k|\geq n} | < x, e_k > |^2 \right)^{1/2} \quad \text{vers} \quad 0 \ .$$

Exemple : le cas $L^2(\mathbb{T})$

$L^2(\mathbb{T})$ est un espace de Hilbert séparable. Il admet pour base orthonormée la famille (base trigonométrique)

$$e_k(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kt}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Définition

On définit l'espace de Sobolev W^s, $s \geq 0$, comme le sous–espace de $L^2(0,1)$ associé à la norme

$$\|x\|_{W^s} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s} | < x, e_k > |^2 \right)^{1/2}$$

Approximations et espaces de Sobolev

On a, pour $x \in W^s$,

$$\left(\sum_{|k| \geq n} | < x, e_k > |^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|_{W^s} (1+n)^{-s} \ .$$

D'autre part, la définition des espaces de Sobolev avec la base trigonométrique se traduit par des propriétés de régularité :

Lemme

Les 2 propositions suivantes sont équivalentes pour tout entier p :

(i) x admet une dérivée $x^{(p)}$ d'ordre p dans $L^2(\mathbb{T})$.

(ii) $x \in W^p$.

On a déjà vu que les fonctions exponentielles complexes de fréquence k localisée sur $[l, l+1)$ forment une base orthonormée de L^2 :

$$g_{k,l}(t) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi kt} \mathbb{1}_{[l,l+1)}(t), \quad k, l \in \mathbb{Z} .$$

Elle permet une représentation temps-fréquence discrète de tout $x \in L^2$.
Cette base a un équivalent temps-échelle : la base de Haar, définie par

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi_{\mathcal{H}}(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R} ,$$

où $\psi_{\mathcal{H}}(t) = \mathbb{1}_{[0,1/2)} - \mathbb{1}_{(1/2,1]}$.
Ces 2 bases sont bien localisée en temps (support compact) et mal localisée en fréquence ($\boldsymbol{\sigma}_\xi = \infty$).

Théorème

La base de Haar est une base orthonormée de L^2.

Preuve

On remarque que $\psi_{j,k}$ est à support dans $[k2^{-j},(k+1)2^{-j})$; dès lors on voit aisément que $(\psi_{j,k})$ est une famille orthonormée. Définissons $V_j \subset L^2$ comme l'espace des fonctions L^2 constantes sur tous les intervalles $2^{-j}[k,k+1)$. Alors il est facile de voir que $(\psi_{j,k})_k$ est dense dans E_j, défini comme l'orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Par suite il ne reste qu'à vérifier que $\cap_j V_j = \{0\}$ et $\overline{\cup_j V_j} = L^2$, ce qui implique

$$\overline{\oplus_j E_j} = L^2 \quad \text{et donc} \quad \overline{\{\psi_{j,k},\ j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}} = L^2 \,.$$

Approximations de Haar

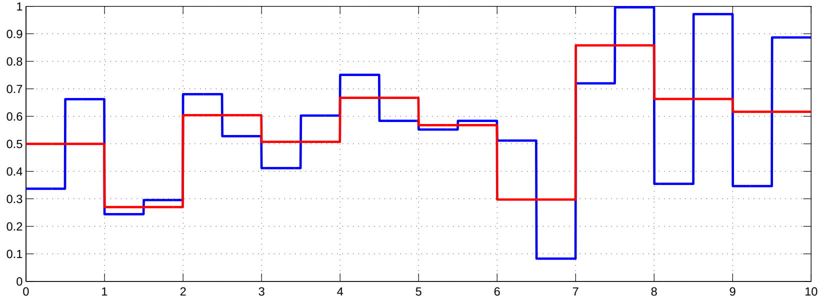


FIGURE: $V_1 = E_0 \oplus_\perp V_0$

Approximations de Haar 2d

Play

FIGURE: $V_8 = V_0 \oplus E_0 + \cdots + \oplus E_7$ en dimension 2

Alternatives aux bases orthonormées

Il est souvent utile d'utiliser des bases aux propriétés plus faibles que les bases orthonormées.
Nous allons en donner 2 extensions de nature différente :

1. les bases de Riesz fournissent une représentation unique d'un élément de H en série inconditionnellement convergente.
2. les bases obliques ou trames autorisent une description redondante de H sous forme d'approximations successives par des séries inconditionnellement convergentes.

Bases de Riesz

Définition

(e_k) est une base de Riesz de l'espace de Hilbert H si c'est une famille dénombrable dense et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x = \sum_k \alpha_k e_k \in H$,

$$C^{-1} \sum_k |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_2^2 \leq C \sum_k |\alpha_k|^2 \,.$$

Remarque 1

C'est une base orthonormée ssi on peut prendre $C = 1$.

Remarque 2

Il existe une base duale $(\tilde{e}_k)$ telle que, pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_k < x, e_k > \tilde{e}_k = \sum_k < x, \tilde{e}_k > e_k \quad .$$

Preuves

1. En effet, comme
$< e_k, e_l > + < e_l, e_k >= \|e_k + e_l\|_2^2 - \|e_k\|_2^2 - \|e_l\|_2^2$ et
$< e_k, e_l > - < e_l, e_k >= \mathrm{i}\left(\|e_k + \mathrm{i}e_l\|^2 - \|e_k\|_2^2 - \|\mathrm{i}e_l\|_2^2\right)$, on obtient $< e_k, e_l >= \mathbb{1}(k = l)$.
2. Soit $T : H \to \ell^2$, $\sum_k \alpha_k e_k \mapsto (\alpha_k)$. Alors T est un isomorphisme. Soit $T^* : \ell^2 \to H$ son adjoint défini par

$$< T^* x, y >_H =< x, Ty >_{\ell^2} \quad .$$

On note $(\tilde{e}_k)$ la base de H obtenue comme l'image par T^* de la base canonique (f_k) sur ℓ^2. Alors

$$< \tilde{e}_k, e_l >_H =< f_k, Te_l >_{\ell^2} =< f_k, f_l >_{\ell^2} = \mathbb{1}(k = l) \ .$$

Bases obliques (ou frame)

Définition

(e_k) est une "frame" de l'espace de Hilbert H si c'est une famille dénombrable dense et qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x \in H$,

$$C^{-1}\|x\|_2^2 \leq \sum_k | < x, e_k > |^2 \leq C\|x\|_2^2 \ .$$

Remarque

Un base de Riesz est une frame mais l'inverse est en général faux.

Remarque

Ce n'est pas nécessairement une base orthonormée même quand $C = 1$ (tight frame).

Approximations successives par frame

On construit un algorithme récursif :

$$x = Tx + x_1, \quad \ldots \quad , x_k = Tx_k + x_{k+1}, \quad \ldots,$$

où

$$Tx = \sum_k < x, e_k > e_k \quad (\text{comme si } \{e_k\} \text{ était une b.o.n.})$$

Lemme
Pour e_k bien normalisé, il existe $r < 1$ tel que $\|x_k\|_2 \leq r^k \|x\|_2$.

Preuve

On normalise e_k de telle sorte que, pour $0 < C_1 < C_2 < 2$,

$$C_1 \|x\|_2^2 \leq \sum_k | < x, e_k > |^2 \leq C_2 \|x\|_2^2 \; .$$

Alors, au sens des opérateurs auto–adjoints,

$$C_1 \mathbb{1} \leq T \leq C_2 \mathbb{1} \; ,$$

et donc

$$\|T - \mathbb{1}\| \leq r \quad \text{avec} \quad r = (1 - C_1)_+ \vee (C_2 - 1)_+ \; .$$

Remarque

Pour une tight frame, $r = 1$ mais cela n'empêche pas la redondance !

Définition d'une AMR

Définition

Soit (V_j) une suite emboîtée $(V_j \subset V_{j+1})$ de sous–espaces fermés de L^2. C'est une Analyse Multi-Résolution (AMR) si

1. on passe de V_j à V_{j+1} par dilatation dyadique :
$$f \in V_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in V_0 \ .$$
2. $\overline{\bigcup_j V_j} = L^2$.
3. $\bigcap_j V_j = \{0\}$.
4. V_0 admet une base de Riesz de la forme $\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque

Une AMR est entièrement définie par la fonction g, on l'appellera fonction génératrice.

Exemple : AMR de Haar

On a déjà défini une AMR (sans le dire) pour la base de Haar :

$V_j = \{$fonctions L^2 constantes sur tous les intervalles $2^{-j}[k, k+1)\}$.

Cela définit bien une AMR en prenant par exemple $g = \mathbb{1}_{[0,1)}$.
On remarque que la base de Haar est donnée par

$\psi_{\mathcal{H}}(t) = g(2t) - g(2t-1) \Rightarrow \psi_{j,k}(t) = g(2^{j+1}t - 2k) - g(2^{j+1}t - 2k - 1)$,

avec $\{\psi_{j,k}\, k \in \mathbb{Z}\}$ b.o.n. de E_j défini par (voir Fig. 2)

$$V_{j+1} = V_j \oplus_{\perp} E_j \ .$$

B.o.n. associée à une AMR

On généralise la construction de la base de Haar à toute AMR :
Soit (E_j) défini par

$$V_{j+1} = V_j \oplus_\perp E_j \ .$$

Il suit des propriétés de l'AMR que

$$L^2 = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} E_j} \ ,$$

et

$$f \in E_j \Leftrightarrow f(2\cdot) \in E_{j+1} \Leftrightarrow f(2^{-j}\cdot) \in E_0 \ .$$

B.o.n. associée à une AMR (suite)

On obtient une b.o.n. de la forme

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\ ,$$

dés lors qu'on est capable de

$$\boxed{\text{construire une b.o.n. de } E_j \text{ pour un } j \text{ donné.}}$$

Régularité d'une AMR

La base de Haar est mal localisée en fréquence car discontinue. Pour obtenir un ψ mieux localisée en fréquence, il suffira de partir d'une AMR régulière.

Définition

Une AMR est de régularité $r \in \mathbb{n}$ si on peut choisir g telle que, pour tout $k = 0, 1, \dots, r$,

$$|g^{(k)}(t)| \leq C_m(1 + |t|)^{-m}, \quad \text{pour tout} \quad m \geq 1 \, .$$

L'AMR de Haar est de régularité nulle.

AMR spline d'ordre r

On généralise l'AMR de Haar à l'AMR spline d'ordre r en définissant :

$$\begin{aligned} V_j = \{f \in L^2,\ r-1 \text{ fois continûment dérivable,} \\ \text{polynomiale de degré } r \text{ sur les intervalles } 2^{-j}[k,k+1)\}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

Cela définit bien une AMR en prenant par exemple $g = \mathrm{sp}_r = \mathbb{1}_{[0,1)}^{\star r}$.

Remarque

L'AMR spline d'ordre r est de régularité r.

Remarque

L'AMR de Haar est une AMR spline d'ordre 0.

Fonctions spline

Définition

La fonction $\mathrm{sp}_r = \mathbb{1}_{[0,1)}^{\star r}$ est appelée fonction spline d'ordre r.

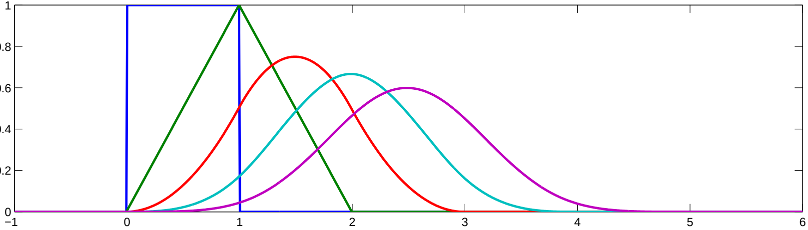


FIGURE: Fonctions spline d'ordre $r = 0, 1, 2, \ldots, 4$

Fonctions spline

Propriétés

1. sp_r a pour support $[0, r+1]$.
2. Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{\mathrm{sp}}_r(\omega) = \left\{(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega/2}\mathrm{sinc}(\omega/2)\right\}^{r+1} \quad ;$$

3. Pour tout f localement intégrable, $f \star \mathbb{1}_{[0,1)}$ a pour dérivée $f(\cdot) - f(\cdot - 1)$.
4. On en déduit facilement par récurrence que $\mathrm{sp}_r \in V_0$ avec V_0 défini par (12)
5. On peut utiliser des propriétés d'interpolation des fonctions spline pour montrer qu'elles forment une base de Riesz de V_0.

AMR de Shannon

On définit l'AMR de Shannon par

$$V_0 = \{f \in L^2,\ \forall\omega \notin [-\pi,\pi],\ \widehat{f}(\omega) = 0\}\ .$$

(fonctions à bande limitée). On définit une b.o.n $\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ de V_0 en posant $g(t) = \mathrm{sinc}(\pi t)$.

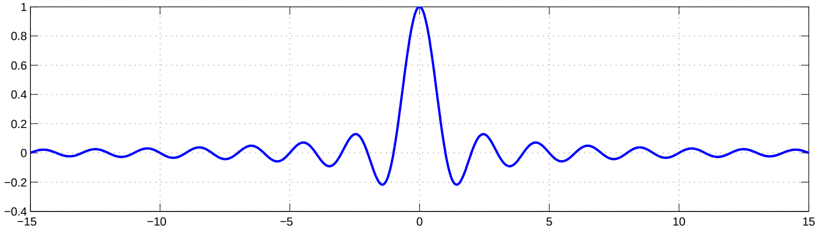


FIGURE: Fonction $g(t) = \mathrm{sinc}(\pi t)$.

AMR de Shannon (fonctions à bandes limitées)

Montrons que $\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n de V_0 en passant en Fourier :

1. Comme $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega = 2\pi \operatorname{sinc}(\pi t)$, on a
$$\widehat{g}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\omega) \ .$$
2. D'autre part, on sait que $(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}$ est une b.o.n. de $L^2([-\pi,\pi])$,
3. donc $(2\pi)^{-1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\mathbb{1}_{[-\pi,\pi]}(\omega)$ est une b.o.n. de $\mathcal{F}(V_0)$.
4. par isométrie de $\mathcal{F}$, on obtient que $\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n de V_0.

On observe de plus que $\mathcal{F}(V_j)$ est l'espace des fonctions à bande limitée dans $2^j[-\pi,\pi]$.
On en conclut que l'on obtient bien une AMR de L^2.

Caractérisation d'une AMR par Fourier

On admet le résultat suivant :

Théorème

Soit $g \in L^2$ et $V_0 = \overline{\mathrm{Vect}}\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$. Supposons :

(i) $\{g(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une base Riesz de V_0.

(ii) $g(\cdot/2) \in V_0$.

(iii) $\widehat{g}$ est continue en 0 et $\widehat{g}(0) \neq 0$.

Alors les espaces (V_j) correspondants forment une AMR de L^2.

Caractérisation d'une AMR par Fourier (suite)

On peut aussi utiliser Fourier pour montrer qu'une famille obtenue par translations de g est une base de Riesz.

Proposition

Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et C_1, C_2 2 constantes réelle strictement positives. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $a = (\alpha_k) \in \ell^2$,

$$C_1 \sum_k |\alpha_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f(\cdot - k) \right\|_2^2 \leq C_2 \sum_k |\alpha_k|^2 \,. \tag{13}$$

(ii) Pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\frac{C_1}{2\pi} \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \leq \frac{C_2}{2\pi} \,. \tag{14}$$

Caractérisation d'une AMR par Fourier (suite)

Preuve

Pour une suite a de support fini, on a

$$\mathcal{F}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k f(\cdot - k)\right](\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k} \widehat{f}(\omega)$$
$$= A(\omega)\widehat{f}(\omega) \quad \text{où } A(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega k}$$

est la série de Fourier associée à a. Or

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k f(\cdot - k)\right\|_2^2 = \left\|A\widehat{f}\right\|_2^2 = \sum_k \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \left|A(\omega)\widehat{f}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega$$
$$= \int_0^{2\pi} |A(\omega)|^2 \sum_k \left|\widehat{f}(\omega + 2k\pi)\right|^2 \mathrm{d}\omega\ .$$

Caractérisation d'une AMR par Fourier (suite)

Preuve (fin)

On conclut en utilisant

$$\int_0^{2\pi} |A(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega = 2\pi \sum_k |\alpha_k|^2$$

et en prouvant successivement

1. (ii)⇒(i) par passage à la limite des approximations à support fini dans ℓ^2,
2. puis (i)⇒(ii) en utilisant que, pour tout borélien $B \subseteq [0, 2\pi]$, il existe une suite de séries de Fourier d'ordre fini convergeant vers $\mathbb{1}_B$ dans $L^2(0, 2\pi)$.

Corollaire

Cette preuve montre de plus que $\mathcal{F}[\sum_k a_k f(\cdot - k)] = A\widehat{f}$.

Base orthonormée de V_0

On considère une AMR (V_j) associée à une fonction génératrice g et les espaces (E_j) définis par

$$V_{j+1} = V_j \oplus_\perp E_j \Rightarrow L^2 = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} E_j} \ .$$

Si $\{\psi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n. de E_0 alors

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \ ,$$

est une b.o.n. de L^2, cf. $\psi = \psi_{\mathcal{H}}$ pour l'AMR de Haar.
Nous allons généraliser cette construction en 2 temps :

1. on construit une ondelette père (ou fonction d'échelle) ϕ telle que $\{\phi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n. de V_0 ;
2. puis une ondelette mère ψ telle que $\{\psi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n. de E_0.

L'ondelette père ϕ

Elle se construit dans le domaine de Fourier en utilisant l'équivalence de (13) et (14). On pose tout simplement

$$\widehat{\phi}(\omega) = (2\pi)^{-1} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(\omega + 2k\pi)|^2\right]^{-1/2} \widehat{g}(\omega) \ .$$

Alors ϕ est bien définie et appartient à
$V_0 = \overline{\mathcal{F}}\left[\{A\widehat{g} : A \in L^2(\mathbb{T})\}\right]$.
De plus, comme

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)\right|^2 = (2\pi)^{-1}$$

on obtient (13) pour $f = \phi$ et $C_1 = C_2 = 1$. D'où $\{\phi(\cdot - k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n. de

$$\overline{\mathcal{F}}\left[\{A\widehat{\phi} : A \in L^2(\mathbb{T})\}\right] = \overline{\mathcal{F}}\left[\{A\widehat{g} : A \in L^2(\mathbb{T})\}\right] = V_0 \ .$$

L'équation d'échelle

Comme $\phi(\cdot/2) \in V_0$, on a l'équation d'échelle :

$$\phi(t/2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi(t-n) \quad \text{avec } h_n = \int \phi(t/2)\phi^*(t-n)\mathrm{d}t \;, \tag{15}$$

qui s'écrit en Fourier :

$$\widehat{\phi}(2\omega) = m(\omega)\widehat{\phi}(\omega) \;, \quad \text{où} \quad m(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n}. \tag{16}$$

Le filtre m

Soit $f \in V_0$ donné par $f(t) = \sum_k c_{0,k}\, \phi(t-k)$. Alors $f \in V_1$ et

$$f(t) = \sum_n c_{1,n}\, 2^{1/2} \phi(2t-n)\ ,$$

$$\text{avec} \quad c_{1,n} = < f, 2^{1/2}\phi(2\cdot -n) > = 2^{-1/2} \sum_k c_{0,k} h_{n-2k}\ .$$

La caractérisation de V_0 dans V_1 est liée aux propriétés du filtre $(h_k)/m$.

Propriété de filtre miroir

On a, pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $|m(\omega)|^2 + |m(\omega+\pi)|^2 = 1$.

Filtre miroir

Preuve

On a par construction

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\omega+2n\pi)\right|^2 = \frac{1}{2\pi} \ . \qquad (17)$$

(16) donne $\widehat{\phi}(\omega+2n\pi) = m(\omega/2+n\pi)\widehat{\phi}(\omega/2+n\pi)$ et donc, en posant $\xi=\omega/2$ et en séparant $n=2k$ et $n=2k+1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} &= |m(\xi)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)|^2 + |m(\xi+\pi)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi+\pi+2k\pi)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}\ \left(|m(\omega)|^2 + |m(\omega+\pi)|^2\right) \ .\end{aligned}$$

Représentations en séries de Fourier

On commence par décrire V_1 :
On peut représenter tout élément $f \in V_1$ par

$$\widehat{f}(\omega) = A(\omega/2)\widehat{\phi}(\omega/2), \; A \in L^2(\mathbb{T})$$

i.e.

$$f(t) = \sum_n a_n \sqrt{2}\phi(2t - n) \quad \text{avec} \quad A(\omega) = 2^{-1/2} \sum_n a_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega n} .$$

On obtient que la transformation $\Phi : V_1 \to L^2(\mathbb{T})$ définie par

$$f \mapsto \pi^{-1/2} A$$

est une isométrie.

Représentation de $V_1 = E_0 \oplus_\perp V_0$

On représente la décomposition $V_1 = E_0 \oplus_\perp V_0$ par son image par l'isométrie Φ.

Théorème

On a

$$\Phi(V_0) = \left\{ v(2\cdot) \times m,\ v \in L^2(\mathbb{T}) \right\} \tag{18}$$

$$\Phi(E_0) = \left\{ w(2\cdot) \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot} \times m^*(\cdot + \pi),\ w \in L^2(\mathbb{T}) \right\} \tag{19}$$

Autrement dit, la décomposition $V_1 = E_0 \oplus_\perp V_0$ prend la forme, pour tout $f \in V_1$,

$$\Phi[f](\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} w(2\omega) m^*(\omega + \pi) + v(2\omega) m(\omega) \ ,$$

avec $v, w \in L^2(\mathbb{T})$.

Preuve

Soit $f \in V_1$, $\widehat{f} = A(\cdot/2)\widehat{\phi}(\cdot/2)$. On a $f \in V_0$ ssi

$$\widehat{f}(\omega) = v(\omega)\widehat{\phi}(\omega) = v(2\omega/2)m(\omega/2)\widehat{\phi}(\omega/2)$$

pour $v \in L^2(\mathbb{T})$. On obtient bien (18). Comme Φ est une isométrie, $L^2(\mathbb{T}) = \Phi(V_1) = \Phi(E_0) \oplus_\perp \Phi(V_0)$. $\Phi(E_0)$ est donc l'ensemble des éléments $A \in L^2(\mathbb{T})$ tels que pour tout $v \in L^2(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} v(2\omega)m(\omega)A^*(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= \int_0^{\pi} v(2\omega)\left[m(\omega)A^*(\omega) + m(\omega+\pi)A^*(\omega+\pi)\right]\mathrm{d}\omega \ , \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $m(\omega)A^*(\omega) + m(\omega+\pi)A^*(\omega+\pi) = 0$ pour presque tout $\omega \in [0, \pi]$ et même $\omega \in [0, 2\pi]$ par 2π-périodicité.

Preuve (suite)

A ω fixé, cela revient à dire que $(A(\omega), A(\omega+\pi))$ appartient à l'orthogonal de $(m(\omega), m(\omega+\pi))$ dans $\mathbb{C}^2$, i.e. qu'il existe $\lambda(\omega) \in \mathbb{C}$ tel que

$$(A(\omega), A(\omega+\pi)) = \lambda(\omega)\left(m^*(\omega+\pi), -m^*(\omega)\right) . \qquad (20)$$

Par la propriété de filtre miroir, $(m^*(\omega+\pi), -m^*(\omega))$ est de norme 1 et donc

$$\lambda(\omega) = A(\omega)m(\omega+\pi) - A(\omega+\pi)m(\omega) .$$

Ceci implique que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot}\lambda$ est π-périodique. Réciproquement pour tout $w \in L^2(\mathbb{T})$, $A = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot} w(2\cdot) m^*(\cdot+\pi) \in L^2(\mathbb{T})$ est solution de (20), ce qui conclut la preuve de (19).

Ondelette mère

Caractérisation d'une ondelette mère

Soit $\psi \in E_0$ défini par la représentation

$$\Phi[\psi](\omega) = \pi^{-1/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega} w(2\omega) m^*(\omega+\pi)$$

i.e.

$$\widehat{\psi}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2} w(\omega) m^*(\omega/2+\pi) \widehat{\phi}(\omega/2) \; .$$

Alors les 2 propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Pour presque tout $\omega \in \mathbb{R}$, $|w(\omega)| = 1$.

(ii) $\{\psi(\cdot - k), \; k \in \mathbb{Z}\}$ est une b.o.n. de E_0.

Preuve

On vérifie que (i) équivaut à $\sum_k |\widehat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = (2\pi)^{-1}$. On l'obtient en utilisant la propriété de filtre miroir et le fait que $\sum_k |\widehat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = (2\pi)^{-1}$.

Décomposition en ondelettes

Soit $f \in V_0$,

$$f(t) = \sum_k c_{0,k}\phi(t-k), \quad t \in \mathbb{R} \,,$$

On décompose V_0 jusqu'à l'échelle 2^j :

$$V_0 = E_{-1} \oplus V_{-1} = \cdots = E_{-1} \oplus \cdots \oplus E_{-j} \oplus V_{-j} \,,$$

ce qui se traduit sur f par

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k d_{-1,k} 2^{-1/2}\psi(t/2-k) + \sum_k c_{-1,k} 2^{-1/2}\phi(t/2-k) \\ &= \vdots \\ &= \sum_{i=1}^{j}\sum_k d_{-i,k} 2^{-i/2}\psi(2^{-i}t-k) + \sum_k c_{-j,k} 2^{-j/2}\phi(2^{-j}t-k) \,. \end{aligned}$$

Coefficients de détail, coefficients d'approximation

De même, tout $f \in L^2 = \overline{\bigoplus}_j E_j$ se décompose en la série

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(t)$$

ou encore, puisque $L^2 = V_{j_0} \oplus \overline{\bigoplus}_{j\geq j_0} E_j$,

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_{j_0,k}\phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j\geq j_0} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_{j,k}\psi_{j,k}(t) \ .$$

Définitions

Les coefficients $c_{i,k}$ et $d_{i,k}$ sont appelés coefficients d'approximation et coefficients de détail à l'échelle 2^{-i} et la position k. L'application $f \mapsto (d_{j,k})_{j,k}$ est appelée transformée en ondelettes discrète (TOD).

Retour aux filtres : algorithme pyramidal

On définit le filtre miroir de $(h_k)/m$ par

$$\tilde{h}_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(k-1)} h^*_{1-k}$$

Les filtres $(h_k)/m$ et $(\tilde{h}_k)/m^*(\cdot + \pi)$ permettent d'effectuer la décomposition $V_0 = E_{-1} \oplus \cdots \oplus E_{-j} \oplus V_{-j}$ par une succession de filtrages/décimation des coordonnées dans V_0 :

Algorithme pyramidal

Pour ψ bien choisie, on a

$$c_{-i-1,k} = 2^{-1/2} \sum_n h^*_{n-2k} c_{-i,n} \ , \tag{21}$$

$$d_{-i-1,k} = 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}^*_{n-2k} c_{-i,n} \ . \tag{22}$$

Preuve

Prenons le cas $i = 0$. Comme $(2^{-1/2}\phi(\cdot/2-k))_k$ est une b.o.n. de V_{-1}, on a

$$c_{-1,k} = 2^{-1/2} < f, \phi(\cdot/2 - k) >= 2^{-1/2} \sum_n c_{0,n} < \phi(\cdot - n), \phi(\cdot/2 - k) > ,$$

ce qui donne (23) car, par (15),

$$< \phi(\cdot - n), \phi(\cdot/2 - k) >= \int \phi(t + 2k - n)\phi^*(t/2)\mathrm{d}t = h^*_{n-2k} \ .$$

De même, on a

$$d_{-1,k} = 2^{-1/2} < f, \psi(\cdot/2 - k) >= 2^{-1/2} \sum_n c_{0,k} < \phi(\cdot - n), \psi(\cdot/2 - k) > \ .$$

Preuve (suite)

On utilise que

$$\widehat{\psi}(\omega) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2} w(\omega) m^*(\omega/2+\pi)\widehat{\phi}(\omega/2) \ ,$$

et l'on prend $w(\omega) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}$ qui est bien de module 1.

$$\begin{aligned} < \phi(\cdot - n), \psi(\cdot/2 - k) > &= 2 \int \widehat{\phi}(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n)\omega} \widehat{\psi}^*(2\omega) \mathrm{d}\omega \\ &= 2 \int \left| \widehat{\phi}(\omega) \right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n+1)\omega} m(\omega+\pi) \mathrm{d}\omega \\ &= \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-n+1)\omega} m(\omega+\pi) \mathrm{d}\omega \\ &= \tilde{h}^*_{n-2k} \ , \end{aligned}$$

où l'on a encore utilisé (17). On obtient bien (24).

Le cas Haar

Pour l'AMR de Haar, on prend $\phi = g = \mathbb{1}_{[0,1]}$.
D'après la définition (15), on a $h_n = \mathbb{1}_{\{0,1\}}(n)$,
$m(\omega) = (1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})/2$,

$$\widehat{\psi}(\omega) = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega/2} - 1)\widehat{\phi}(\omega/2)/2 \; ,$$

donc

$$\psi(t) = \phi(2t - 1) - \phi(2t) = \mathbb{1}_{[1/2,1)} - \mathbb{1}_{[0,1/2)} = -\psi_{\mathcal{H}} \; .$$

D'où aussi $\tilde{h}_n = (-1)^{n-1}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(n)$ et donc

Algorithme pyramidal de Haar

$$c_{-i-1,k} = 2^{-1/2}\big(c_{-i,2k} + c_{-i,2k+1}\big) \; , \tag{23}$$

$$d_{-i-1,k} = 2^{-1/2}\big(-c_{-i,2k} + c_{-i,2k+1}\big) \; . \tag{24}$$

Régularité

Supposons l'AMR r-régulière. Alors on a les faits suivants (admis) :

1. la régularité de g se transmet à ϕ et ψ, par exemple :

$$\forall k = 0, 1, \ldots, r,\ \forall n \geq 0,\ \exists C > 0, \left|\phi^{(k)}(t)\right| \leq C(1 + |t|)^{-n}$$

2. ψ a $r + 1$ moment nuls :

$$\int p(t)\psi(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ pour tout polynôme } p \text{ de degré au plus } r\ .$$

3. ϕ interpole exactement tout polynôme p de degré au plus r :

$$p(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\phi(t-k), \quad t \in \mathbb{R}\ .$$

TOD d'une suite discrète

En pratique on observe des séries finies à temps discret $(x_t)_{t=1,\ldots,T}$. On identifie alors (x_t) à $(c_{0,k})$ et on calcule la TOD de

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \phi(t-k) \ ,$$

1. en complétant $(x_t)_{t=1,\ldots,T}$ par des zéros (cf. approximation classique sur L^2),
2. en périodisant la TOD (on remplace L^2 par $L^2(\mathbb{T})$,
3. en adaptant la TOD au support compact pour atténuer les effets de bord (on remplace L^2 par $L^2([0,T])$).

Les logiciels numériques fournissent en général le calcul de

$$(c_{0,k}) \mapsto [(d_{-1,k}), \ldots, (d_{-j,k}), (c_{-j,k})]$$

en suivant l'une ou plusieurs de ces 3 options.
Le calcul est basé sur l'algorithme pyramidal de complexité $O(T\log(T))$ pour de filtres h de longueur infinie ou $O(T)$ pour de filtres h de longueur finie.

TOD d'une fonction échantillonnée

Si $(x_t)_{t=1,\ldots,T}$ est un signal à temps continu échantillonné

$$x_t = x(\delta t) \ ,$$

les coefficients calculés sur l'interpolation $\tilde{x}(t) = \sum_k x_k \phi(t-k)$

$$< \tilde{x}, \psi_{j,k} >$$

peuvent être vus comme des approximations de

$$< x(\delta \cdot), \psi_{j,k} > \quad .$$

Construction d'une base d'ondelette à partir d'un filtre miroir

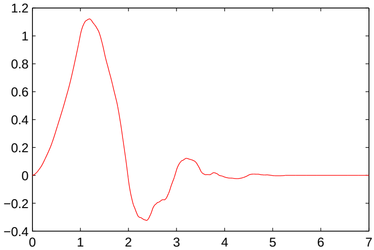
Observons que

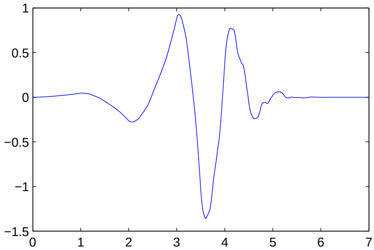
$$\widehat{\phi}(\omega) = m(\omega/2)\widehat{\phi}(\omega/2) = \cdots = \prod_{j=1}^{\infty} m(2^{-j}\omega) .$$

Donc la seule connaissance de m permet de reconstruire l'AMR. Réciproquement, il existe des conditions suffisantes assez simples sur m qui permette d'obtenir une AMR de régularité r donnée.

Ondelettes de Daubechies

C'est ainsi que Daubechies a obtenu des bases d'ondelette à support compact en se basant sur la théorie des filtres RIF miroirs.





La fonction ϕ est solution de l'équation d'échelle :

$$\phi(t/2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \phi(t-n) \ .$$

Processus stochastiques

Définition

Un processus (réel) est une famille de variables aléatoires (réelles) $\{X_t,\, t \in T\}$ définies sur le même espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ici T est un ensemble quelconque. Souvent on prend $T = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ (processus indexé par le temps) ou $T = \mathbb{R}^d$, processus indexé sur l'espace).

Lois fini–dimensionnelles

Soit $X = \{X_t,\, t \in T\}$ un processus. On appelle lois fini–dimensionnelles de X l'ensemble des probabilités définies par

$$P_{t_1,\dots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \dots, X_{t_n} \in A_n),$$

où $n \geq 1$ et $t_1, \dots, t_n$ parcourent T.

On notera $X \stackrel{d}{=} Y$ si X et Y ont même lois fini–dimensionnelles.

Variables et vecteurs gaussiens

Définition

Une variable aléatoire (v.a.) réelle X a une loi gaussienne centrée réduite si elle admet pour densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, .$$

Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \geq 0$. La v.a. $Y = \mu + \sigma X$ a alors une loi gaussienne de moyenne μ et de variance σ^2 (notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$).

Vecteur gaussien

Un vecteur aléatoire $\mathbf{X}$ de dimension d a une loi gaussienne si pour tout $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{t}^T\mathbf{X}$ est une v.a. gaussienne (réelle).

Processus gaussiens

Définition

Un processus $X = \{X_t, \, t \in T\}$ est dit gaussien si toutes ses lois fini–dimensionnelles sont gaussiennes.

Théorème

Soit X un processus gaussien. Alors les lois fini–dimensionnelles de X sont entièrement déterminées par la fonction moyenne

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$$

et par la fonction d'auto–covariance

$$\gamma(s,t) = \operatorname{cov}(X_s, X_t) \ .$$

Exemple : bruit blanc gaussien

Dans ce cas, les lois finis–dimensionnelles sont celles de v.a. $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes (i.i.d.).

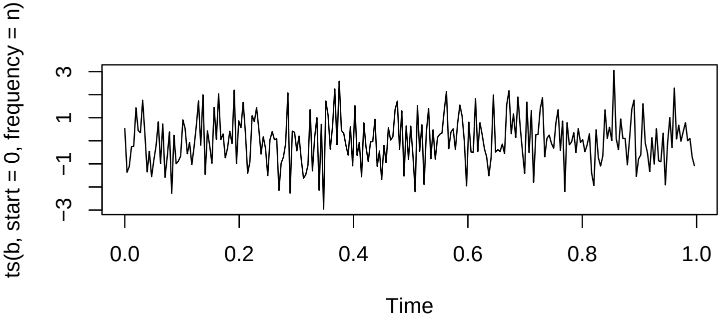


FIGURE: Bruit blanc gaussien : $\mu(t) = 0$ et $\gamma(s,t) = \mathbb{1}_{\{s=t\}}$

Processus gaussiens stationnaires

Prenons $T = \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_+$, ou $\mathbb{R}_+$.
Si μ est une fonction constante et si $\gamma(s,t)$ ne dépend que de $s-t$, le processus gaussien X est stationnaire, c'est-à-dire, pour tout $t \in T$,

$$\{X_{s+t},\ s \in T\} \stackrel{d}{=} \{X_s,\ s \in T\}\ ,$$

C'est le cas du bruit blanc gaussien X mais aussi de tout filtré linéaire du bruit blanc gaussien,

$$Y_t = \sum_k \psi_k X_{t-k}\ ,$$

avec $\sum_k |\psi_k|^2 < \infty$.

Processus gaussiens à accroissements stationnaires

Prenons $T = \mathbb{R}$. Pour $h > 0$, on note l'opérateur de différence finie d'horizon h par

$$[\boldsymbol{\Delta}_h(x)]_t = x_t - x_{t-h} \,.$$

Définition

Un processus $X = \{X_t,\, t \in T\}$ est dit à accroissements stationnaires si $\boldsymbol{\Delta}_h(X)$ est stationnaire pour tout $h > 0$.

Remarque

Si X est à accroissements stationnaires et $X(0) = 0$ p.s., on peut retrouver γ à partir de $\gamma(0)$ et du variogramme défini par

$$\begin{aligned} v(s-t) &= \operatorname{var}(X_s - X_t) \\ &= \gamma(s,s) + \gamma(t,t) - 2\gamma(s,t) \\ &= v(s) + v(t) - 2\gamma(s,t) \,. \end{aligned}$$

Trajectoire d'un processus

On appelle trajectoire d'un processus $X = \{X_t,\, t \in T\}$ l'élément (aléatoire) $t \mapsto X_t$.

Prenons $T = \mathbb{R}$. Le critère de Kolmogorov-Centsov s'écrit

$$\mathbb{E}|X_t - X_s|^p \leq C_p |t-s|^{p\alpha+1} \ ,$$

pour $p > 0$, $C_p > 0$, $\alpha \in (0,1)$ et $|t-s| \leq 1$. Il implique que X admet des trajectoires continues de régularité Höldérienne α.

Processus gaussiens à accroissements stationnaires

Il s'en suit que si X est un processus gaussien stationnaire de variogramme v tel que, quand $u \to 0$,

$$v(u) = O(u^{2\alpha_0}) \ ,$$

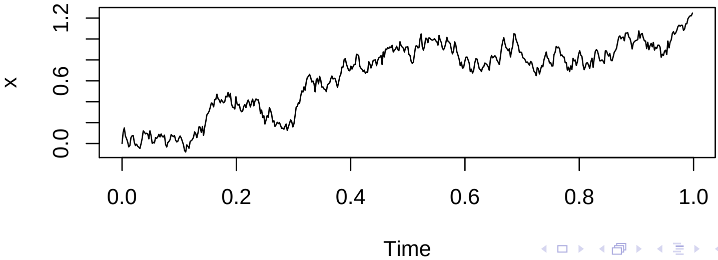
avec $\alpha_0 \in (0,1)$, alors X admet des trajectoires continues de régularité Höldérienne α pour tout $\alpha < \alpha_0$.

Mouvement brownien (mb)

Définition

Soit $T = \mathbb{R}$. Le processus gaussien $M = \{M_t, t \in T\}$ est un mouvement brownien si $M(0) = 0$ p.s., ses trajectoires sont continues et ses accroissements sont stationnaires et indépendants.

On montre alors que son variogramme vérifie alors $v(s-t) = \sigma^2|s-t|$. ($\sigma = 1$ pour le mb standard). Il y a donc unicité à une constante multiplicative près.



Mouvement brownien (mb)

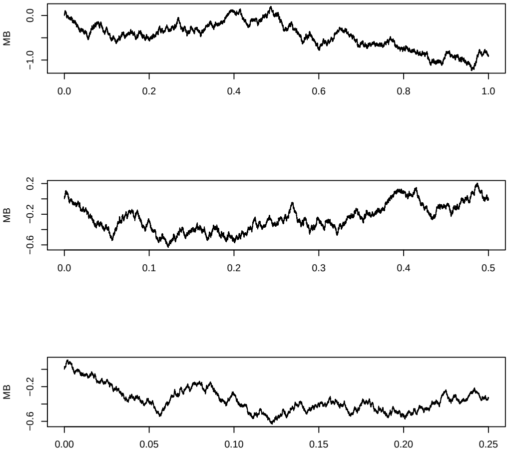


FIGURE: Mouvement brownien : 3 échelles

Auto–similarité

Soit M le mb standard. Alors, pour tout $a > 0$, $M(a\cdot)$ est aussi un mouvement brownien et a pour variogramme

$$\mathrm{var}(M(as) - M(at)) = |as - at| = a\,\mathrm{var}(M(s) - M(t))$$

On en déduit que $M(a\cdot) \stackrel{d}{=} \sqrt{a}M(\cdot)$.

On dit que M est $1/2$-auto–similaire.

On peut de plus montrer que M est de régularité höldérienne exactement $1/2$.

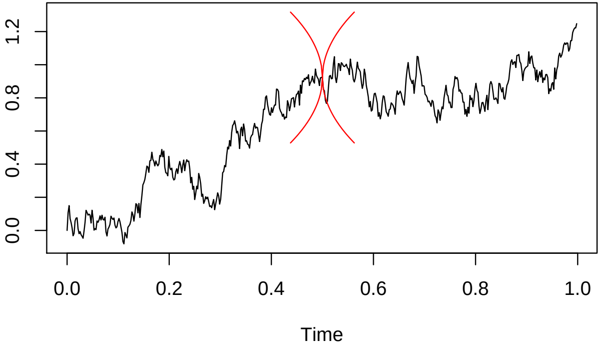


Figure: Mouvement brownien : régularité höldérienne

Mouvement brownien fractionnaire (mbf)

Définition

Soit $H \in (0,1)$. Le mbf $B^{(H)}$ est un processus gaussien H-auto-similaire à accroissements stationnaires.

Donc, pour tout $a > 0$,

$$B^{(H)}(a\cdot) \stackrel{d}{=} a^H B^{(H)}(\cdot) \; .$$

et $\boldsymbol{\Delta}_h(B^{(H)})$ est stationnaire pour tout $h > 0$.

Mbf, un exemple

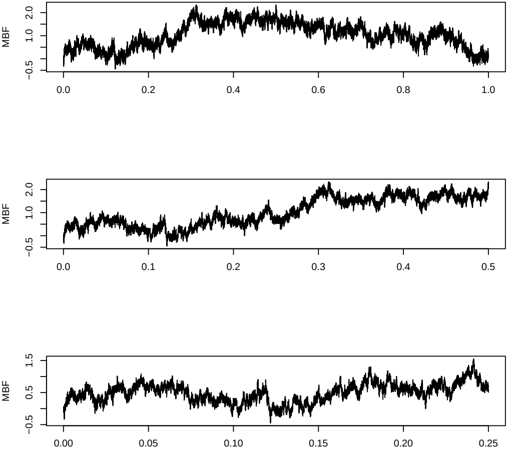


FIGURE: Mouvement brownien fractionnaire, $H = 0.25$: 3 échelles

fbm : propriétés du second ordre

Alors $B_0^{(H)} = 0$ p.s., $\mathbb{E}[B_t^{(H)}] = 0$ et on a

$$\operatorname{var}(B_t^{(H)} - B_s^{(H)}) = \sigma^2 |t-s|^{2H} \ . \tag{25}$$

Il s'en suit

$$\operatorname{cov}(B_s^{(H)}, B_t^{(H)}) = \frac{\sigma^2}{2} \left\{ |t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H} \right\}, \quad s, t \in \mathbb{R} \ .$$

On a donc unicité du mbf avec indice de Hurst H (à une constante multiplicative σ^2 près).

fbm : existence

Si $H = 1/2$, c'est le mouvement brownien.

Soit M_s un mouvement brownien. Pour tout $H \in (0,1)\backslash\{1/2\}$, on peut définir

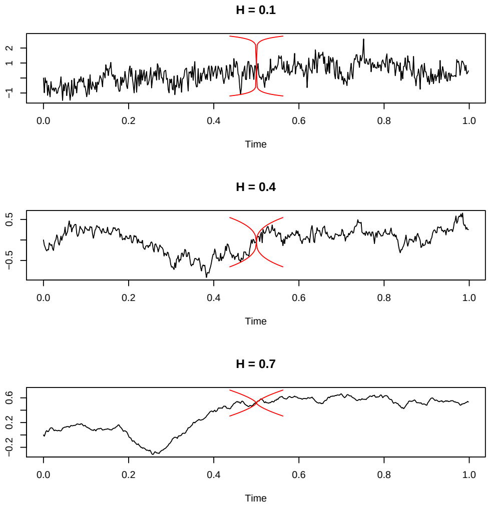
$$X_t = \int \left[(t-s)_+^{H-1/2} - (-s)_+^{H-1/2}\right] \mathrm{d}M_s, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Alors X est gaussien, H-auto-similaire et a des accroissements stationnaires. D'où

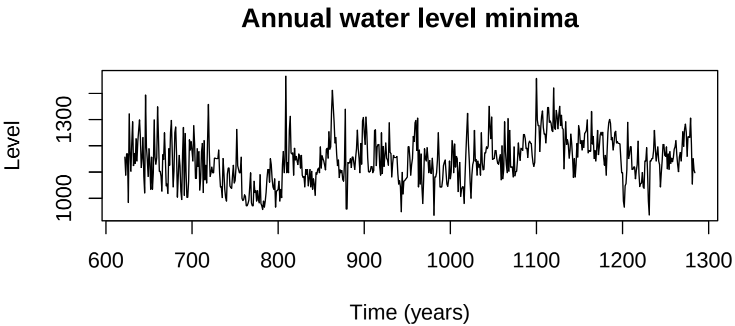
$$X \overset{d}{\propto} B^{(H)} .$$

fbm : propriétés trajectorielles

On peut montrer que B^H a une trajectoire de régularité Höldérienne H.



Des données “historiques”



Données étudiées par Hurst (1951).

Statistique R/S

On définit

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{[tn]} X_k,\ t \geq 0 \text{ et } \widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{[tn]}(X_k - S_n(1)/n)^2\ ,$$

où $X_k, k \geq 1$ sont les observations.
Puis

$$\frac{R}{S} = \frac{\sup(S_n(t) - tS_n(1)) - \inf(S_n(t) - tS_n(1))}{\widehat{\sigma}}\ ,$$

où les $\sup$ et $\inf$ sont pris sur $t \in [0, 1]$.

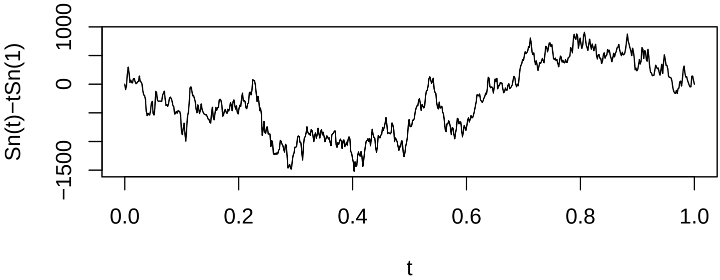
Comportement asymptotique

Si les X_k sont de variance finis et i.i.d., alors le théorème de Donsker (principe d'invariance) indique que

$$n^{-1/2}\frac{R}{S} \Rightarrow \sup_{t\in[0,1]} B_0(t) - \inf_{t\in[0,1]} B_0(t) \ ,$$

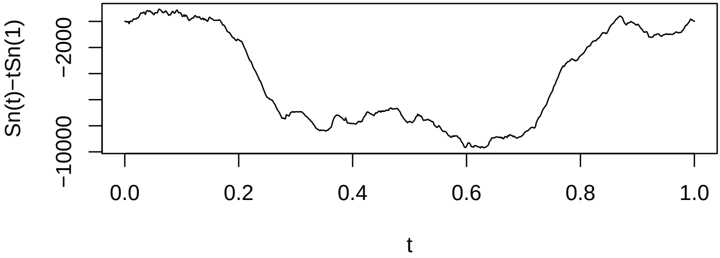
où B_0 est un pont brownien, $B_0(t) = M(t) - tM(1)$, avec M mouvement brownien.

Sommes partielles empiriques pour un modèle “pas trop dépendant”



Le graphe obtenu ressemble à celui d’un mouvement brownien.

Sur les données du Nile



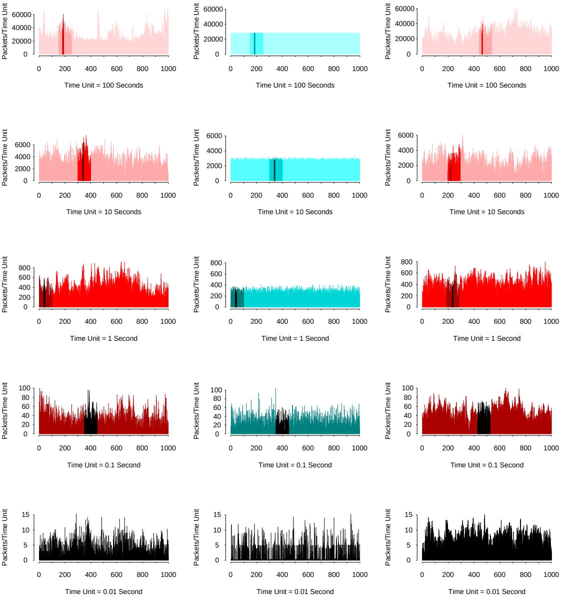
Le graphe obtenu est bien plus régulier.
On trouve

$$\frac{R}{S} \simeq n^{0.737} \; .$$

Mandelbrot a repris les données de Hurst et a proposé pour d'utiliser le mbf comme modèle de ces données.

Données de trafic Internet

Le graphe suivant est emprunté à Willinger, Taqqu, Leland, Wilson (1995).


Packets/Time Unit
Time Unit = 100 Seconds
Time Unit = 100 Seconds
Time Unit = 100 Seconds
Time Unit = 10 Seconds
Time Unit = 10 Seconds
Time Unit = 10 Seconds
Time Unit = 1 Second
Time Unit = 1 Second
Time Unit = 1 Second
Time Unit = 0.1 Second
Time Unit = 0.1 Second
Time Unit = 0.1 Second
Time Unit = 0.01 Second
Time Unit = 0.01 Second
Time Unit = 0.01 Second

Interpretation (Willinger *et al* (1995))

Soit $\{S_i(t), t > 0\}$ des sources On-Off indépendantes avec des sessions à queues lourdes données par un indice $\alpha \in (1, 2)$, et soit le trafic cumulé

$$X_{N,T}(t) = \int_0^{tT} \sum_{i=1}^{N} S_i(s)\, \mathrm{d}s \ .$$

Alors, si $N \to \infty$ puis $T \to \infty$,

$$T^{-H} N^{-1/2} (X_{N,T} - \mathbb{E}[X_{N,T}]) \Rightarrow B^{(H)} \ .$$

où $B^{(H)}$ est le mbf avec paramètre de Hurst $H = (3 - \alpha)/2$.

Analyse en ondelette du mouvement brownien

Soit $\{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ un mouvement brownien. Soit $\{\psi_{j,k},\, j,k \in \mathbb{Z}^2\}$ une base d'ondelettes à support compact. Alors

$$W_{j,k} = < X, \psi_{j,k} >$$

sont des variables gaussiennes indépendantes, centrées de variance

$$\sigma_j^2 = \mathrm{var}(W_{j,k}) \propto 2^{-2j} \; .$$

Synthèse du mouvement brownien par séries d'ondelettes

Réciproquement, soit $\{W_{j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}^2\}$ une suite de variables gaussiennes indépendantes, centrées de variance

$$\sigma_j^2 = \mathrm{var}(W_{j,k}) \propto 2^{-2j} \ .$$

Alors

$$\sum_{j,k} W_{j,k} \{\psi_{j,k} - \psi_{j,k}(0)\}$$

converge localement uniformément p.s. vers un mb.

Analyse en ondelette du mouvement brownien fractionnaire

Si $\{X(t),\, t \in \mathbb{R}\}$ un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst H, alors

$$W_{j,k} =< X, \psi_{j,k} >$$

sont des variables gaussiennes dépendantes, centrées de variance

$$\sigma_j^2 = \mathrm{var}(W_{j,k}) \propto 2^{-(2H+1)j} \ . \tag{26}$$

Remarque

Meyer, Sellan et Taqqu (1999) ont proposé une astuce : en perdant la propriété de base L^2 de $\{\psi_{j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}^2\}$, on peut de ramener au cas où les $\{W_{j,k},\ j,k \in \mathbb{Z}^2\}$ sont indépendantes.

Analyse en ondelette pour l'estimation de H

L'idée est d'utiliser la relation (26) pour estimer H à partir de X_s, $s = 1, \ldots, n$:

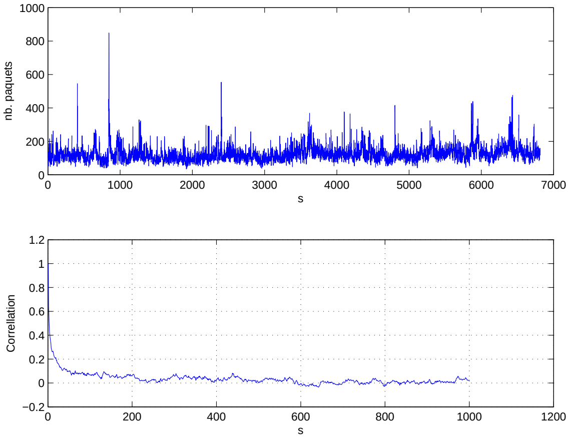
1. On calcule $W_{j,k}$, $1 \leq k \leq n_j$, $0 \leq j \leq J$
2. On utilise le scalogramme

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} W_{j,k}^2$$

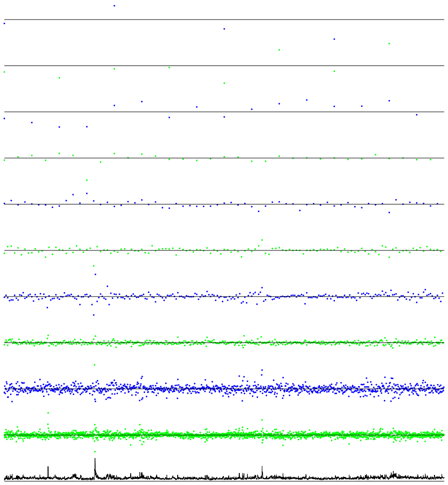
   comme estimateur de σ_j^2.
3. On en déduit H en considérant que $\log \widehat{\sigma}_j^2$ est une fonction affine de j de pente donnée par H.

Un exemple sur les données de trafic Internet

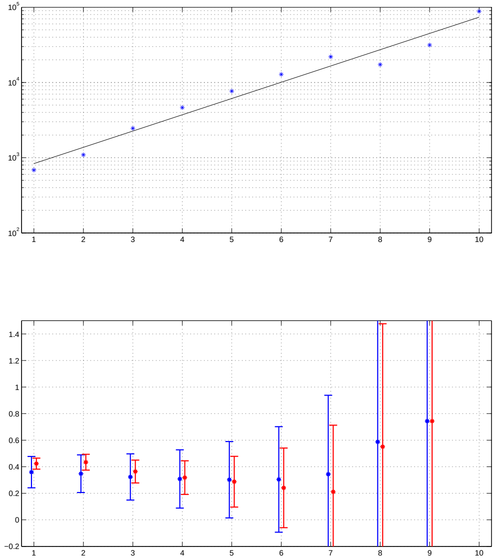
2 heures de Télé–trafic agrégé par seconde.



Les coefficients d'ondelettes



Le scalogramme et l'estimation de H



Un peu de lecture I

P. Abry, P. Flandrin, M. S. Taqqu, and D. Veitch. Self-similarity and long-range dependence through the wavelet lens. In P. Doukhan, G. Oppenheim, and M. S. Taqqu, editors, *Theory and Applications of Long-range Dependence*, pages 527–556. Birkhäuser, 2003.

P. Flandrin. *Time-Frequency/Time-scale Analysis*. Academic Press, 1st edition, 1999.

S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1998. ISBN 0-12-466605-1.

Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.