

Modélisation de la relation spatiale « entre » pour des objets d’extensions spatiales très différentes

Modeling the spatial relation “between” for objects with very different spatial extensions

Isabelle Bloch¹

Olivier Colliot¹

Roberto M. Cesar Jr.²

¹ GET-ENST, Dép. TSI, CNRS UMR 5141 LTCI, Paris, France

Isabelle.Bloch@enst.fr, Olivier.Colliot@enst.fr

² USP, IME, Sao Paulo, Brésil - cesar@ime.usp.br

Résumé

Le raisonnement spatial, par exemple pour la reconnaissance de structures dans les images, s’appuie fortement sur les relations spatiales entre les objets. Nous nous intéressons ici à la relation ternaire « entre », qui est de nature à la fois vague et contextuelle. Son caractère vague nous a conduits à proposer des modèles flous. Le caractère contextuel suggère qu’il n’est pas possible d’envisager une même définition dans toutes les situations. En particulier, des définitions spécifiques sont nécessaires suivant que les objets ont des extensions spatiales similaires ou non. Nous avons détaillé précédemment le cas où les objets ont des extensions spatiales similaires. Ici, nous nous intéressons au cas où les objets ont des extensions spatiales différentes et nous proposons des modélisations d’expressions telles que « B est entre A₁ et A₂ » selon que A₁ ou A₂ est étendu, que B est étendu, ou que plusieurs objets sont étendus.

Mots Clef

Raisonnement spatial, relation spatiale « entre », ensembles flous, dilatation floue, visibilité.

Abstract

Spatial reasoning, for instance for recognizing structures in images, strongly relies on spatial relations between objects. We deal here with the ternary relation “between”, which is both vague and contextual. Vagueness led us to propose fuzzy models. Its contextual aspect suggests that it is not possible to design a unique definition dealing with all situations. In particular, specific definitions are required depending on whether the objects have a similar spatial extension or not. We previously detailed the case of objects with similar spatial extension. Here, we consider objects having different spatial extensions, and we propose to model expressions such as “B is between A₁ and A₂” in cases A₁ or A₂ is extended, B is extended, or several objects are extended.

Keywords

Spatial reasoning, spatial relation “between”, fuzzy sets, fuzzy dilation, visibility.

1 Introduction

Le raisonnement spatial, par exemple pour la reconnaissance de structures dans les images, s’appuie fortement sur les relations spatiales entre les objets. Ces relations, souvent plus stables que les propriétés des objets eux-mêmes, fournissent une information structurelle et constituent des outils de description importants dans beaucoup d’applications. Si certaines relations ont été largement étudiées (adjacence, inclusion, distances, directions par exemple), des relations plus complexes ont fait l’objet de peu de travaux.

Nous nous intéressons ici à la relation ternaire « entre ». Dans nos travaux précédents, nous avons montré que cette relation était à la fois vague et contextuelle [4, 5]. Son caractère vague nous a conduits à proposer des modèles flous. Le caractère contextuel suggère qu’il n’est pas possible d’envisager une même définition dans toutes les situations. En particulier, des définitions spécifiques sont nécessaires suivant que les objets ont des extensions spatiales similaires ou non.

Nous avons détaillé précédemment le cas où les objets ont des extensions spatiales similaires. Ici, nous nous intéressons au cas où les objets ont des extensions spatiales différentes. Bien que les spécificités de ces cas aient été mentionnées dans la littérature de la linguistique et des sciences cognitives [12], aucun modèle mathématique n’a été proposé à notre connaissance. Il s’agit par exemple de modéliser des connaissances du type « l’arbre est entre la maison et la route », « la route est entre les deux immeubles », « la route est entre la maison et la plage », ou encore « la route est entre la voie ferrée et la plage ». Ces exemples, dans lesquels au moins un des objets est très étendu, illustrent les différents types de situations que nous nous proposons de modéliser. Ainsi, la représentation de « B est entre A₁ et A₂ » prendra des formes différentes selon que A₁ ou A₂ est étendu, que B est étendu, ou que plusieurs objets sont étendus.

Dans nos travaux précédents, nous avons proposé une approche en deux étapes (notée **A0**) : une région floue β est définie, représentant la portion de l’espace située entre A₁ et A₂ ; puis une mesure d’adéquation entre B et β est cal-

culée, sous forme d'intersection normalisée quand les objets ont des extensions spatiales similaires. Cette approche est résumée dans la section 2. Puis nous proposons des modèles dans les différentes situations illustrées par les exemples ci-dessus. Le cas où l'un des objets de référence A_1 ou A_2 est étendu est traité dans la section 3, selon deux approches, l'une traduisant une notion de projection et l'autre une notion de distance. Le cas où B est étendu nécessite de revoir la mesure d'adéquation entre B et β , et une nouvelle proposition est faite dans la section 4. Le cas où l'un des deux objets de référence et B sont étendus se déduit directement des deux cas précédents. Une approche s'écartant de notre proposition initiale est détaillée dans la section 5 : le calcul de β dépend de B , ce qui est bien adapté au cas où A_1 et A_2 sont étendus. Enfin, le cas où les trois objets sont étendus est modélisé dans la section 6. Dans tout l'article, nous supposons que, dans l'espace continu, les objets considérés sont compacts (ce qui permet une extension simple au cas discret) et qu'ils ne sont formés que d'une seule composante connexe. L'extension à des objets ayant plusieurs composantes connexes est immédiate en utilisant un principe de distributivité [5].

2 Objets d'extensions spatiales similaires

Les quelques définitions de la littérature du raisonnement spatial qualitatif ne prennent pas en compte les aspects flous et contextuels puisqu'elles s'appuient sur la colinéarité entre points et non sur les formes considérées globalement [1, 11]. De plus, elles ne traitent pas correctement les concavités d'un objet qui ne sont pas visibles depuis l'autre objet. Les mêmes problèmes se rencontrent avec des définitions simples reposant par exemple sur l'enveloppe convexe de la réunion des deux objets ainsi qu'avec les quelques définitions floues existantes [7, 10, 13]. Aucune définition de la littérature ne prend en compte le cas où au moins un des objets est très étendu.

L'approche que nous proposons consiste à définir d'abord la région β entre deux objets A_1 et A_2 , puis à déterminer dans quelle mesure un objet B est dans cette région, et donc « entre » A_1 et A_2 . Nous la notons $\mathbf{A0}$ dans le cas d'objets d'extensions spatiales similaires.

Plusieurs approches ont été proposées dans [4, 5]. Nous en décrivons succinctement deux ici, qui répondent aux limites de méthodes simples fondées sur l'enveloppe convexe de $A_1 \cup A_2$. La première repose sur l'idée de dilatation floue [6] des deux objets par un élément structurant représentant les directions dans lesquelles chaque objet se trouve par rapport à l'autre. Ces directions peuvent être obtenues par l'histogramme d'angles $h_{(A_1, A_2)}(\theta)$ [14], à partir duquel on définit deux éléments structurants flous : $\nu_1(r, \theta) = h_{(A_1, A_2)}(\theta)$ et $\nu_2(r, \theta) = h_{(A_1, A_2)}(\theta + \pi) = \nu_1(r, \theta + \pi)$. L'histogramme des angles est calculé par :

$$h_{(A_1, A_2)}(\theta) = |\{(a_1, a_2), a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \angle(a_1 \vec{u}_2, \vec{u}) = \theta\}| \quad (1)$$

où \vec{u} désigne un axe de référence, par exemple correspon-

dant au premier axe de coordonnées. La région β est alors calculée par :

$$\beta_{Dil}(A_1, A_2) = D_{\nu_2}(A_1) \cap D_{\nu_1}(A_2) \cap A_1^C \cap A_2^C \cap [D_{\nu_1}(A_1) \cap D_{\nu_1}(A_2)]^C \cap [D_{\nu_2}(A_1) \cap D_{\nu_2}(A_2)]^C. \quad (2)$$

Les deux premiers termes correspondent à l'intersection de la dilatation de A_1 dans la direction de A_2 et de la dilatation de A_2 dans la direction de A_1 . Les autres termes permettent d'éliminer A_1 et A_2 ainsi que les concavités des ensembles qui ne se font pas face. La dilatation floue d'un ensemble flou μ par un élément structurant flou ν est calculée selon l'approche de [6] :

$$D_\nu(\mu)(x) = \sup_y t[\nu(y), \mu(x - y)] \quad (3)$$

où t est une t-norme (conjonction floue) et x et y désignent des points de l'espace.

La seconde approche repose sur l'interprétation intuitive de la relation « entre » en termes de visibilité depuis chacun des objets. Par exemple, dans la figure 1, l'objet A_2 a une concavité qui n'est pas visible depuis A_1 et qui ne devrait donc pas être incluse dans $\beta(A_1, A_2)$. Nous proposons, pour prendre en compte ce type de situation, d'utiliser la notion de segments admissibles [15]. Un segment $]x_1, x_2[$, avec $x_1 \in A_1$ et $x_2 \in A_2$, est dit admissible s'il est inclus dans $A_1^C \cap A_2^C$. Les points visibles depuis A_1 et A_2 sont ceux qui appartiennent aux segments admissibles. Nous définissons alors la région entre A_1 et A_2 , notée β_{Adm} , comme la réunion des segments admissibles.

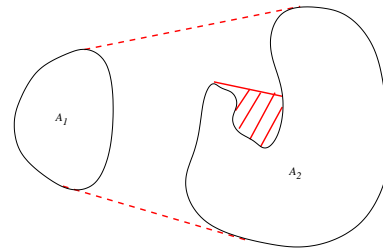


FIG. 1 – Un exemple avec une concavité non visible (partie hachurée).

Cette définition peut être ensuite assouplie en introduisant la notion de visibilité floue, illustrée dans la figure 2. Pour cela, nous relâchons l'admissibilité en semi-admissibilité en introduisant un point P intermédiaire sur les segments. Un segment $]a_1, P[$ avec $a_1 \in A_1$ (respectivement $]P, a_2[$ avec $a_2 \in A_2$) est dit semi-admissible s'il est inclus dans $A_1^C \cap A_2^C$. En chaque point P de l'espace, on détermine l'angle le plus proche de π entre deux segments semi-admissibles de P à A_1 et A_2 respectivement. Formellement cet angle est calculé par :

$$\theta_{min}(P) = \min\{|\pi - \theta|, \theta = \angle([a_1, P], [P, a_2]), a_1 \in A_1, a_2 \in A_2,]a_1, P[\text{ et }]P, a_2[\text{ semi-adm.}\}. \quad (4)$$

La région entre A_1 et A_2 est alors définie comme la région floue de fonction d'appartenance :

$$\beta_{admF}(P) = f(\theta_{min}(P)) \quad (5)$$

où f est une fonction de $[0, \pi]$ dans $[0, 1]$ telle que $f(0) = 1$, f est décroissante, et devient égale à 0 à partir du plus grand écart admissible à π (cette valeur, ainsi que la forme de f , peut être adaptée en fonction du contexte).

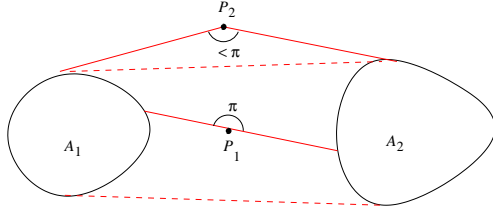


FIG. 2 – Illustration du concept de visibilité floue. Le point P_1 est sur un segment admissible et $\beta(P_1) = 1$, alors que pour le point P_2 , il n'est pas possible de trouver deux segments colinéaires admissibles joignant un point de A_1 (respectivement A_2) à P_2 , donc $\beta(P_2) < 1$, exprimant que P_2 n'est pas complètement entre A_1 et A_2 .

A partir de la définition de β , le degré de satisfaction de la relation pour un objet B peut être défini par une mesure d'intersection normalisée :

$$M_0(B, \beta) = \frac{|B \cap \beta|}{|B|}. \quad (6)$$

Cette approche est satisfaisante lorsque B est d'extension spatiale similaire à celle de A_1 et A_2 .

Un exemple est illustré dans la figure 3 sur des structures du cerveau. Les valeurs de $\frac{|B \cap \beta|}{|B|}$ sont respectivement de 0,92 pour la méthode de dilatation floue, 0,76 pour les segments admissibles et 0,95 pour la visibilité floue. Ces valeurs illustrent l'intérêt du flou pour obtenir des degrés de satisfaction plus élevés dans des situations comme celles de cette figure, dans laquelle la réponse intuitive serait d'affirmer que B est bien entre A_1 et A_2 .

Notons que toutes ces définitions s'étendent au cas où les objets A_1 , A_2 et B sont flous.

3 Cas où A_2 est étendu

Dans le cas où les objets ont des extensions spatiales très différentes, la région β doit alors être définie plus localement, afin de ne considérer que la partie de l'objet étendu (A_2 par exemple) située en regard de l'autre objet (A_1). Par exemple dans l'exemple « la fontaine est entre la maison et la route », la route n'est pas intéressante globalement, mais seule sa portion proche de la fontaine doit être prise en compte. L'approche **A0** ne convient donc pas puisqu'elle considère chaque objet comme un tout.

Nous proposons pour cela deux méthodes, l'une à partir de dilatations floues, dans la direction orthogonale à la direction principale de l'objet le plus étendu, l'autre à partir

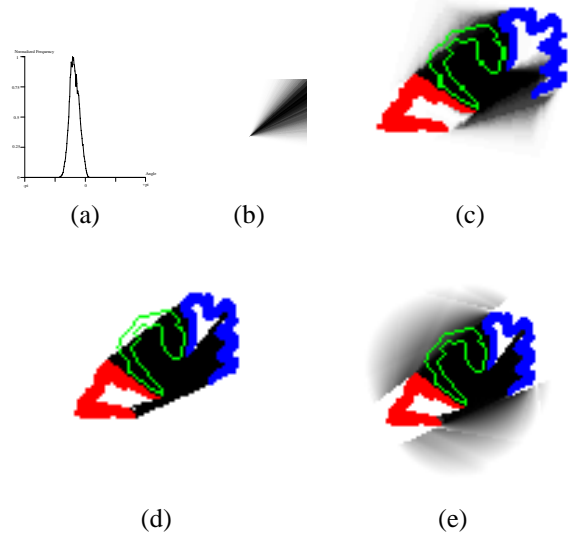


FIG. 3 – (a) Histogramme d'angles entre A_1 et A_2 (objets rouge et bleu). (b) Élément structurant flou ν_1 (ν_2 est son symétrique) Les niveaux de gris les plus sombres correspondent aux degrés d'appartenance les plus élevés. (c) Région $\beta(A_1, A_2)$ obtenue par dilatation floue. Les contours de B sont superposés en vert. (e) Segments admissibles. (f) Visibilité floue.

d'un calcul de distance. En termes de visibilité, elles correspondent à une vision « myope » dans laquelle les parties de A_2 trop éloignées de A_1 ne sont pas vues, ce qui est bien conforme à l'intuition. Dans les deux cas, la deuxième étape suit celle de l'approche **A0**, et le degré de satisfaction de la relation est donné par $\frac{|B \cap \beta|}{|B|}$.

3.1 Approche par projection

Nous proposons de définir la région β par projection floue de A_1 sur A_2 , réalisée par une dilatation floue de A_1 dans la direction orthogonale à la direction d'allongement principale de A_2 . La région β est alors en quelque sorte l'ombre de A_1 .

Nous faisons ici une hypothèse supplémentaire, largement vérifiée dans la plupart des situations de ce type, en approchant la partie de A_2 la plus proche de A_1 par un segment. Si cette hypothèse semble trop restrictive, par exemple dans le cas où A_2 a beaucoup de méandres, ce segment peut être calculé localement et la partie de A_2 considérée sera alors approchée par plusieurs segments, de directions différentes.

Soit \vec{u} la direction principale de A_2 correspondant à ce segment (ou à un de ces segments). La région β peut être construite en dilatant A_1 par un élément structurant défini par un segment orthogonal à \vec{u} , en limitant l'extension de la dilatation au demi-plan borné par la droite portant \vec{u} et contenant A_1 . Toutefois, cette définition semble trop stricte, et nous préférons une dilatation floue [6] par un élément structurant flou ayant une fonction d'appartenance décroissante en fonction de l'écart à la direction \vec{u} .

Cette définition plus souple correspond mieux à l'intuition, et fournit une région β qui s'estompe lorsque l'on s'éloigne de la direction orthogonale à \vec{u} . La figure 4 présente un exemple d'élément structurant flou lorsque \vec{u} est la direction verticale (cette approche correspond à celle que nous avons développée pour définir des relations directionnelles entre objets [2]).

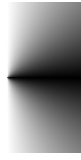


FIG. 4 – Un exemple d'élément structurant flou défini autour de l'axe horizontal (\vec{u} est la direction verticale).

La direction du segment de projection peut être calculée par exemple en dilatant la partie de A_2 la plus proche de A_1 (obtenue à partir d'une carte de distances), conditionnellement à A_2 , puis en déterminant l'axe principal d'inertie du résultat.

Cette approche est illustrée à la figure 5. En termes de visibilité, elle correspond effectivement à une vision « myope », dans laquelle les parties de A_2 éloignées de A_1 ne sont pas prises en compte.

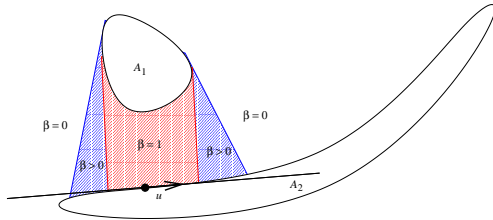


FIG. 5 – Illustration de la définition de la région β dans le cas d'un objet étendu. Dans les zones indiquées par $\beta > 0$, la relation est satisfaite avec un degré compris entre 0 et 1. Ces zones peuvent être plus ou moins étendues en fonction de l'élément structurant, donc de la sémantique de la relation.

Si les objets présentent des concavités, cette approche est combinée avec la méthode de visibilité, afin d'éviter des résultats contre-intuitifs dans ces concavités. Par exemple dans la figure 6, la concavité de l'objet A_1 sera comprise dans β avec la méthode de projection. Une solution simple pour éviter cela est de combiner par un opérateur conjonctif (le minimum par exemple) cette définition de β avec la région produite par la méthode de visibilité fondée sur les segments admissibles et calculée dans le support de β . Les segments admissibles peuvent aussi être limités à ceux qui ont une direction orthogonale à \vec{u} .

Alors que le problème des concavités de A_1 est facilement résolu par cette procédure, la question est moins évidente pour les concavités éventuelles de A_2 . La figure 6 offre un exemple dans lequel A_2 a une concavité non visible depuis A_1 . Cette concavité doit également être supprimée si l'on

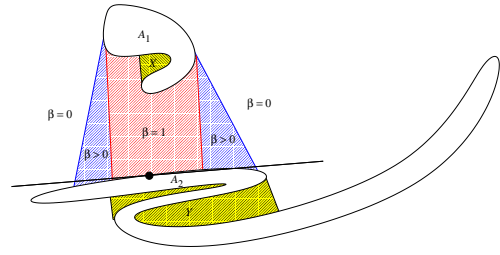


FIG. 6 – Un exemple avec une concavité de A_1 non visible depuis A_2 (région X) et un objet étendu A_2 avec des concavités non visibles depuis A_1 (Y).

considère que les deux objets jouent des rôles symétriques. En réalité ce n'est pas tout à fait le cas dans la méthode de projection, puisque l'action de projeter A_1 sur A_2 ou une partie de A_2 n'est pas symétrique. De plus, l'approximation de A_2 par un segment ne peut pas être réalisée globalement, mais seule la partie de A_2 allongée faisant face à A_1 doit être prise en compte pour cette approximation, comme l'illustre la figure 6. Alors la concavité non visible située du côté de l'axe d'approximation non concerné par la projection n'est de toutes façons pas incluse dans β . Ainsi, il est plus important de tenir compte des concavités de A_1 que de celles de A_2 dans ce cas.

L'approche par projection et dilatation floue est illustrée sur des objets synthétique dans la figure 7. Le résultat de la dilatation a été conditionné par la région de visibilité définie par les segments admissibles afin de tenir compte des concavités. La dilatation floue est programmée selon l'équation 3 avec la t-norme minimum (notons que dans cet exemple, seul l'élément structurant est flou).



FIG. 7 – Région β_{Adm} entre les deux objets de gauche calculée par dilatation floue, conditionnée par la réunion des segments admissibles. La direction principale \vec{u} de l'objet étendu est calculée localement dans la région proche de l'autre objet. L'élément structurant flou a des degrés égaux à un dans la direction orthogonale à \vec{u} , et des degrés qui diminuent lorsque l'on s'écarte de cette direction. La région β peut être plus ou moins étalée suivant l'élément structurant.

3.2 Approche par distance

La deuxième méthode que nous proposons repose sur un calcul de distances. Une première région est calculée selon la méthode des segments admissibles, β_{Adm} . Puis, dans cette région, les distances aux deux objets sont additionnées :

$$\forall x \in \beta_{Adm}, d_{A_1 A_2}(x) = d(x, A_1) + d(x, A_2) \quad (7)$$

où $d(x, A)$ désigne la distance de x à A supposé compact. Dans le cas discret, ces distances sont calculées de manière simple et rapide par des algorithmes classiques de chanfrein [8].

Cette fonction peut alors être seuillée afin d'éliminer les régions de A_2 trop éloignées de A_1 et donc non pertinentes pour le calcul de la région entre. Ainsi β est défini par :

$$\beta_{Dist1} = \{x \in \beta_{Adm}, d_{A_1 A_2}(x) \leq s\} \quad (8)$$

où s désigne la valeur du seuil.

Deux exemples illustrent cette approche dans la figure 8, et montrent l'effet de contextualisation attendu.

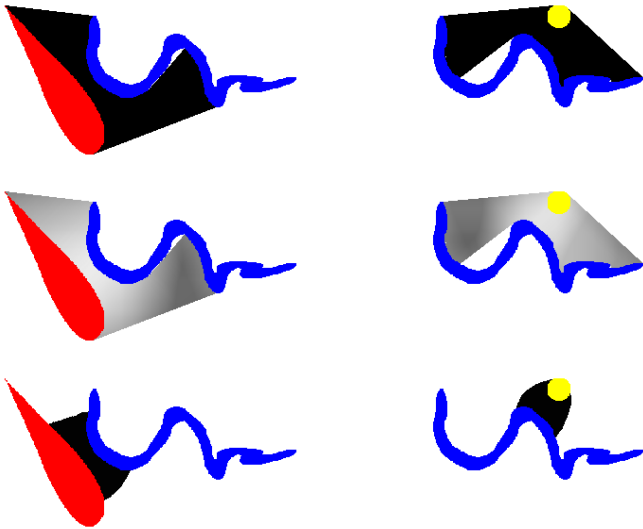


FIG. 8 – Région β_{Adm} , fonction $d_{A_1 A_2}$ et région β_{Dist1} pour deux exemples.

Un inconvénient de cette approche est la nécessité de définir un seuil, qui rend la définition de la région β discontinue par rapport à ce seuil. Une version plus souple de cette méthode consiste à définir une région floue comme une fonction de $d_{A_1 A_2}$, rendant ainsi la définition moins sensible au choix des paramètres :

$$\forall x \in \beta_{Adm}, \beta_{Dist2}(x) = f(d_{A_1 A_2}(x)) \quad (9)$$

où f est une fonction décroissante prenant ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Un résultat est présenté dans la figure 9 pour les mêmes objets que ceux de la figure 8. Dans cet exemple, nous avons pris pour f une fonction linéaire décroissante telle que $f(0) = 1$, $f(d) = 0$ pour $d \geq s$ où s est un seuil. Notons que la valeur du seuil a ici beaucoup moins d'importance puisque β n'est plus binaire. D'autres fonctions sont possibles, par exemple $f(d) = 1/d$.

4 Cas où B est très étendu par rapport à A_1 et A_2

Dans le cas où A_1 et A_2 restent d'extension limitée, le calcul de β se fait selon la première étape de l'approche A0 (section 2). En revanche, si B est d'extension spatiale



FIG. 9 – Région β_{Dist2} pour les exemples de la figure 8.

beaucoup plus importante, la mesure d'adéquation doit être adaptée. En effet, si B est très étendu, la mesure d'inclusion sera proche de 0, ce qui ne correspond pas à la sémantique d'expressions du type « la route est entre les deux immeubles ». Une expression équivalente serait « la route passe entre les deux immeubles », et nous proposons donc une mesure de « traversée » de β , modélisant la notion « B passe entre A_1 et A_2 », ainsi que l'idée de parcours attachée à cette notion. Ce concept de parcours est intéressant du point de vue cognitif, et est à la base d'un des algorithmes que nous proposons. Il traduit également l'idée que le fait que B s'étende au-delà de la région β ne doit pas être pénalisé.

Nous examinons ensuite la question de la continuité entre les situations où B est d'extension spatiale limitée, similaire à celle de A_1 et A_2 , et celles où il devient de plus en plus étendu.

4.1 Mesures de traversée

Nous proposons deux mesures de traversée. Dans toute la suite, nous noterons $Supp(\beta)$ le support de la région β :

$$Supp(\beta) = \{x, \beta(x) > 0\}$$

et $Core(\beta)$ son noyau :

$$Core(\beta) = \{x, \beta(x) = 1\}.$$

La première approche repose sur l'hypothèse que $Supp(\beta) \setminus Core(\beta)$ a deux composantes connexes. Cette hypothèse est généralement vérifiée d'après la manière dont nous avons réalisé la projection ou calculé les distances (voir les exemples des figures 5, 8 et 9). Soient R_1 et R_2 ces composantes. Le degré avec lequel B traverse β doit être élevé si B va au moins d'un point de R_1 à un point de R_2 en passant par des points de β . On retrouve bien ici la notion de parcours. Cette notion peut être formalisée en calculant le maximum des degrés d'appartenance à β des points de B , le long de chemins inclus dans B et ayant une extrémité x_1 dans R_1 et une extrémité x_2 dans R_2 . Lorsque x_1 ou x_2 n'existent pas, les cas particuliers suivants doivent être considérés :

- si ni x_1 ni x_2 n'existe, alors
 - soit B est inclus dans le noyau de β , et la mesure $M_0(B, \beta)$ a du sens et peut donc être utilisée,
 - soit $B \cap \beta = \emptyset$ et le degré de la relation est simplement fixé à 0;
- si x_1 n'existe pas dans B , mais x_2 existe (ou le contraire), alors :
 - une version stricte du modèle est de fixer le degré de satisfaction de la relation à 0;

- une version moins sévère consiste à calculer l'intersection normalisée, comme pour M_0 , mais en restreignant le calcul aux points de B ayant des degrés d'appartenance non nuls à β .

Un autre critère selon la même ligne consiste à tester si $B \setminus \beta$ a deux composantes, une de chaque côté de β (ou de $Core(\beta)$). Une mesure appropriée est alors :

$$M_1(B, \beta) = \min \left[\sup_{x \in R_1} (B \cap \beta^C)(x), \sup_{x \in R_2} (B \cap \beta^C)(x) \right] \quad (10)$$

qui s'applique directement dans le cas flou également. Dans cette équation, β peut être remplacé par son noyau, ce qui donne une évaluation plus optimiste du degré de satisfaction de la relation :

$$M_2(B, \beta) = \min \left[\sup_{x \in R_1} (B \cap Core(\beta)^C)(x), \sup_{x \in R_2} (B \cap Core(\beta)^C)(x) \right]. \quad (11)$$

Il est clair que ces mesures n'ont d'intérêt que si $B \cap Core(\beta) \neq \emptyset$. Sinon, le degré de satisfaction de la relation est fixé à 0. Une illustration des équations 10 et 11 est donnée dans la figure 10, dans le cas 1D, pour un objet B binaire et une région β floue.

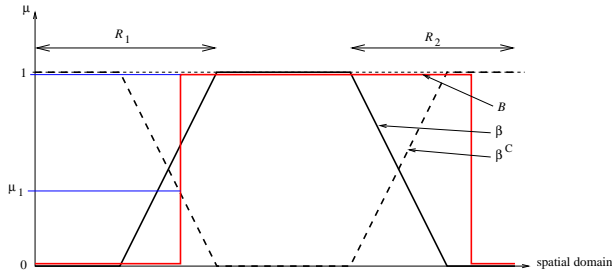


FIG. 10 – Exemple de calcul du degré de satisfaction de la relation dans le cas d'un objet étendu B (dans un espace mono-dimensionnel). En utilisant l'équation 10, la valeur obtenue est μ_1 , qui peut être considérée comme une évaluation pessimiste. L'équation 11 donne une valeur égale à 1, ce qui correspond mieux à ce qui serait intuitivement attendu dans ce cas.

La deuxième méthode que nous proposons recherche explicitement un parcours dans B qui traverse β . Pour cela, nous considérons les coordonnées, selon la direction orthogonale à la direction de projection \vec{u} , d'une séquence de points inclus dans B . Pour des valeurs croissantes de ces coordonnées dans la séquence, les valeurs d'appartenance à β doivent être d'abord croissantes puis décroissantes (au sens large). Le maximum des valeurs de β le long de telles séquences est alors pris comme degré de satisfaction de la relation entre.

Ce type de mesure peut aussi être utilisé dans des cas plus généraux que ceux traités dans cette section, si la taille de

B ne doit pas jouer de rôle important dans l'application considérée. Regardons les exemples de la figure 11. Dans le premier exemple, nous voulons certainement que B soit entre A_1 et A_2 avec un degré égal à 1. Dans les deux autres situations, le degré de satisfaction de la relation dépendra de la définition choisie et du contexte. Avec l'intersection normalisée (mesure M_0), le degré de satisfaction décroît du premier exemple au dernier. Avec les mesures proposées dans le cas où B est étendu, ce degré sera égal à 1 dans les deux derniers exemples. Quelle est la réponse la plus satisfaisante ? Cette question n'a à notre avis pas de réponse absolue, et tout dépend de ce que l'on veut et de la sémantique que l'on attache à la relation entre, en particulier pour le dernier exemple. Si B est une route passant entre deux maisons, il est cohérent d'obtenir un degré de satisfaction de la relation égal à 1. En revanche, si B représente une zone où une personne est supposée en attendre une autre entre A_1 et A_2 , alors on préférerait vraisemblablement un degré plus faible, en particulier plus faible que dans les deux premiers cas. On s'attendrait en effet à trouver la personne dans une région plus réduite, située dans l'enveloppe convexe de la réunion de A_1 et A_2 , délimitée par les traits en pointillés. Ces exemples illustrent la forte dépendance de la sémantique et du contexte de l'application dans le cas où B est étendu.

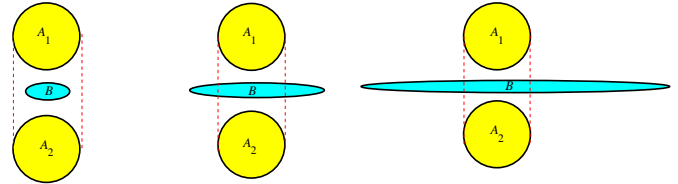


FIG. 11 – Trois cas dans lesquels le degré avec lequel B est entre A_1 et A_2 peut varier suivant le contexte et la définition.

Ces exemples illustrent aussi la difficulté de proposer des définitions qui soient continues lorsque l'on passe d'une situation à l'autre. Cet aspect est traité dans le paragraphe suivant.

4.2 Passage de B d'extension spatiale limitée à B étendu

Afin de garantir une continuité entre les situations où B est d'extension spatiale limitée, similaire à celle de A_1 et A_2 , et celles où il devient de plus en plus étendu (comme sur la figure 11), nous proposons d'utiliser deux mesures, une d'inclusion (intersection normalisée), M_0 , et l'autre de traversée, notée M_t (qui peut être définie par M_1 ou M_2). En effet, les deux situations correspondent à deux sémantiques différentes, qui peuvent difficilement être traduites par une seule mesure. Dans les situations extrêmes, comme celles à gauche et à droite de la figure 11, ces deux mesures sont duales : dans la situation de gauche, $M_0 = 1$ et $M_t = 0$, alors que dans la situation de droite M_0 tend vers 0 et $M_t = 1$. En revanche, dans toutes les situations intermédiaires, c'est l'ensemble de ces deux mesures qui

peut alors rendre compte de la variété des situations et de l’ambiguïté éventuelle sur la sémantique de la relation. Si le raisonnement à partir de ces deux mesures semble trop compliqué pour certaines applications, une mesure globale les résumant peut en être déduite, par exemple en les combinant en fonction du degré d’allongement de B . A partir du périmètre $P(B)$ et de la surface $S(B)$ de B , le degré d’allongement peut être défini comme une fonction de $\frac{P^2}{S}$, par exemple :

$$\alpha(B) = 1 - \frac{4\pi S(B)}{P(B)^2} \quad (12)$$

qui vaut 0 pour un disque et 1 pour un segment de longueur infinie.

Nous définissons alors une mesure globale du degré de satisfaction de la relation par :

$$(1 - \alpha(B))M_0 + \alpha(B)M_t. \quad (13)$$

Cette formulation simple permet de privilégier la sémantique d’inclusion si B est d’extension spatiale limitée, ou au contraire la sémantique de traversée si B est étendu.

Une extension de cette approche pourrait être de définir un degré d’allongement non pas absolu, mais relatif à celui de A_1 , A_2 , ou même β .

4.3 Cas où A_2 et B sont étendus

Cette situation est simplement résolue en calculant β comme dans le cas où seul A_2 est étendu (section 3), et le degré d’adéquation comme dans le cas où B est étendu (section 4). Elle ne pose donc pas de problème particulier. Reprenons l’exemple de la figure 8, avec un objet B étendu satisfaisant bien la relation. La figure 12 illustre ce cas, pour β calculé comme un seuil sur la distance (figure 8) ou comme une fonction floue de la distance (figure 9). Dans les deux cas, B traverse bien β et le degré de satisfaction de la relation est égal à 1.



FIG. 12 – Régions β_{Dist1} et β_{Dist2} pour un des exemples de la figure 8, et superposition avec un objet B étendu (long segment oblique). Le degré de satisfaction de la relation calculé comme un degré de traversée est bien égal à 1.

5 Contextualisation par rapport à B

L’approche **A0** a l’avantage de calculer β indépendamment de B , ce qui est intéressant lorsque l’on s’intéresse à la position de plusieurs objets B par rapport aux deux mêmes objets de référence A_1 et A_2 . Cependant, il peut être intéressant de réduire l’espace à la région proche de A_1 et A_2 ou de B . Seules certaines parties des objets sont alors prises en compte, et l’approche **A0** peut alors être utilisée

(mais β dépend alors également de B). Cette méthode est particulièrement intéressante lorsque les deux objets A_1 et A_2 sont étendus (en particulier d’extension spatiale beaucoup plus grande que celle de B).

Dans ces situations, on pourrait appliquer l’une des méthodes précédentes aux objets complets, mais cela n’aurait pas beaucoup de sens dans nombre d’exemples. Ainsi, lorsque que l’on dit que « la maison est entre la rivière et la route », nous considérons implicitement une région d’intérêt autour de la maison et nous faisons abstraction des parties de A_1 et A_2 éloignées de B , ainsi que de leur agencement spatial. Cette idée de région d’intérêt est facile à mettre en œuvre, puisque les méthodes proposées peuvent être appliquées conditionnellement à une région de l’espace. Il faut noter qu’il s’agit alors d’une contextualisation par rapport à B , contrairement à l’approche proposée dans le cas où A_2 est étendu, dans laquelle la contextualisation se faisait par rapport à A_1 .

Cette région d’intérêt peut être définie simplement à partir d’une distance à B :

- soit par un seuil de la fonction distance, et la région d’intérêt est alors binaire,
- soit par une fonction décroissante de la distance, et la région d’intérêt est alors floue, ce qui rend sa définition plus robuste au choix des paramètres.

Un exemple est illustré sur la figure 13. Dans cet exemple, la région d’intérêt est définie par un seuillage de la fonction distance à B . La région β est calculée comme l’intersection de la région d’intérêt et de la région obtenue par la méthode des segments admissibles. Une méthode similaire peut être employée pour une région β définie de manière floue.



FIG. 13 – Un exemple dans lequel A_1 et A_2 sont étendus et B est d’extension spatiale limitée. La région β calculée par la méthode de visibilité est restreinte à une région d’intérêt autour de B .

On peut débattre de l’intérêt d’utiliser une région d’intérêt autour de B dans tous les cas, sachant que $\beta(A_1, A_2)$ ne dépend alors plus seulement de A_1 et A_2 , mais aussi de B . Bien que cela soit en contradiction avec l’approche que nous avons initialement proposée, cette idée peut être intéressante dans certaines applications, qu’il reste à développer.

6 Cas où les trois objets sont étendus

Un exemple typique correspondant à trois objets étendus est « la route est entre la voie ferrée et la plage ». Nous proposons deux approches pour modéliser cette situation, qui correspondent à deux points de vue différents que peut avoir l’utilisateur.

Le premier point de vue est celui d'un utilisateur qui s'intéresserait à une certaine région, par exemple au voisinage d'une ville. Une première approche repose donc sur une contextualisation comme dans le cas précédent, en considérant uniquement l'intersection des objets avec une région d'intérêt R , et l'approche **A0** peut alors être appliquée. Cette intersection peut se faire à deux niveaux différents :

- On calcule $A_1 \cap R$, $A_2 \cap R$ et la région β entre ces deux intersections, puis on prend $\beta \cap R$ (utile en particulier dans le cas où R n'est pas convexe); on calcule ensuite $M_0(B \cap R, \beta \cap R)$. Ce cas est illustré figure 14. Cette approche ignore certaines parties de R (à gauche de β sur la figure par exemple), et conduit à une valeur plus faible de M_0 que ce qui pourrait être attendu.
- Pour tout point de R , on teste si ce point appartient à un segment admissible (avec des extrémités qui peuvent être hors de R), et β est défini comme la réunion des points satisfaisant ce critère (β est alors inclus dans R par construction); on calcule ensuite $M_0(B \cap R, \beta)$. Dans l'exemple de la figure, on retrouve alors un degré de satisfaction de la relation égal à 1.

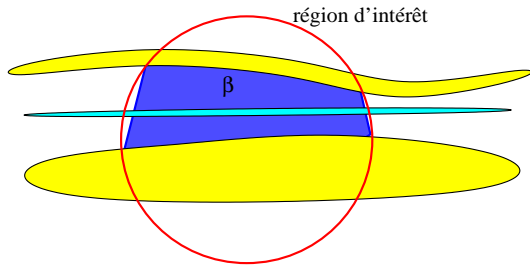


FIG. 14 – Cas de trois objets étendus pour lequel l'espace est réduit à une région d'intérêt.

Des situations plus délicates peuvent se produire lorsque la forme de R est plus compliquée. Par exemple, sur la figure 15, la première méthode donne une valeur de M_0 faible dans la situation de gauche, et un degré égal à 1 dans la situation de droite, alors que la deuxième méthode donne des degrés égaux à 1 dans les deux cas.

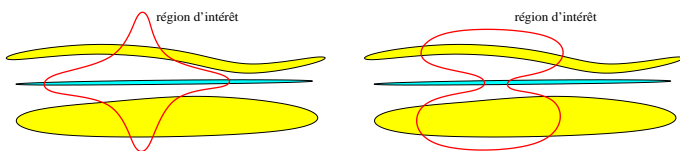


FIG. 15 – Influence de la forme de la région d'intérêt.

L'exemple de la figure 16 est encore plus compliqué. La première méthode donne un degré nul et la seconde un degré égal à 1. Y a-t-il vraiment une réponse qui soit la meilleure dans toutes les situations ? La sémantique de la région R joue vraisemblablement un rôle dans le choix à effectuer... Une piste pourrait être de définir un chemin admissible géodésique pour traiter ce genre de situation. Toutefois, on peut s'interroger sur l'existence de problèmes réels dans lesquels on choisirait une région d'intérêt aussi tordue.

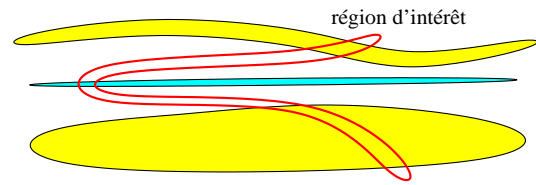


FIG. 16 – Influence de la forme de la région d'intérêt : situation très ambiguë.

Un autre point de vue, plus intégratif, est celui d'un utilisateur qui examinerait la situation sur de plus grandes distances. Une seconde approche, modélisant ce comportement, consiste alors à intégrer des résultats de tests locaux. Nous proposons de vérifier localement que B est entre A_1 et A_2 , en testant les intersections de A_1 et A_2 selon une droite orthogonale à la direction principale de B en chaque point. Soit \vec{u}_x la direction principale de B au point x , et \vec{v}_x l'axe orienté, orthogonal à \vec{u}_x , passant par x et d'origine x . L'objet B est dit localement entre A_1 et A_2 si l'axe \vec{v}_x coupe A_1 et A_2 en des points de coordonnées le long de \vec{v}_x négatives pour l'un des deux objets, positives pour l'autre. Ce critère, combiné à une condition de visibilité pour éviter les concavités non visibles (le segment joignant le premier point sur A_1 et le premier point sur A_2 doit être admissible), nous fournit une réponse binaire en chaque point x , notée $b(x)$. Un degré global de satisfaction $M(B, A_1, A_2)$ de la relation est ensuite obtenu en intégrant cette réponse en x sur B (ou sur la portion de B qui nous intéresse) :

$$M(B, A_1, A_2) = \int_{B'} b(x) dx \quad (14)$$

où B' désigne B ou son sous-ensemble d'intérêt. Le principe du calcul est illustré dans la figure 17.

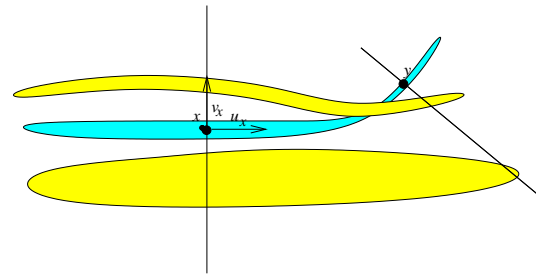


FIG. 17 – Le point x satisfait la propriété locale mais pas le point y . L'intégration sur tous les points de B conduit à un degré de satisfaction de la relation strictement compris entre 0 et 1.

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé des modèles formels pour définir la relation spatiale « entre » et le degré de satisfaction de propositions du type « B est entre A_1 et A_2 » dans des situations non traitées par les quelques approches existantes, dans lesquelles au moins un des trois objets est de grande extension spatiale. Ces modèles correspondent

bien à ce qui est intuitivement attendu. Nous avons souligné l'importance du contexte de l'application et de la sémantique que l'on veut donner à la relation pour choisir la définition la plus appropriée.

Les propriétés décrites dans le cas d'objets d'extensions spatiales similaires sont encore en partie vérifiées. La symétrie n'a plus réellement de sens, puisque les objets A_1 et A_2 ne jouent plus forcément les mêmes rôles. L'invariance par transformation rigide est conservée. Dans le cas d'objets non connexes, une propriété de distributivité permet d'étendre les définitions directement. Par exemple si A_1 est formé de plusieurs composantes connexes A_1^i , on définira β par $\beta(A_1, A_2) = \beta(\cup_i A_1^i, A_2) = \cup_i \beta(A_1^i, A_2)$. La complexité algorithmique dans le cas discret est de l'ordre de $N_1 N_2$, où N_i est le cardinal de A_i , pour le calcul des segments admissibles. Pour la dilatation floue utilisée dans la méthode de projection, elle est en $O(NN_\nu)$ où N est le cardinal de l'espace borné (l'image par exemple) dans lequel le calcul est effectué, et N_ν est le cardinal du support de l'élément structurant utilisé. Le calcul de la visibilité floue a une complexité en $O(NN_1 N_2)$. La méthode fondée sur les distances a une complexité linéaire si des méthodes rapides de calcul des distances sont utilisées (méthodes de chanfrein, par propagation). La contextualisation impliquée dans certains calculs a une complexité linéaire en nombre de points de la région d'intérêt et n'augmente donc pas la complexité du calcul global.

Les mesures de satisfaction de la relation ont les propriétés suivantes :

- $M_0(B, \beta)$ est égal à 0 si et seulement si $B \cap \beta = \emptyset$ et égal à 1 si et seulement si $B \subseteq \beta$;
- si $B \cap \text{Core}(\beta) \neq \emptyset$, $M_1(B, \beta)$ (équation 10) vaut 0 si et seulement si $B \cap R_1 = \emptyset$ ou $B \cap R_2 = \emptyset$, et vaut 1 si et seulement si $B \cap \beta^C \cap R_1 \neq \emptyset$ et $B \cap \beta^C \cap R_2 \neq \emptyset$ (B doit s'étendre au-delà du support de β des deux côtés) ; on retrouve bien le caractère sévère de cette mesure ;
- $M_2(B, \beta)$ (équation 11) vaut 1 dès que B intersecte R_1 et R_2 , et vaut 0 si et seulement si $B \cap R_1 = \emptyset$ ou $B \cap R_2 = \emptyset$.

Toutes les définitions proposées, si elles ont été illustrées uniquement dans le cas d'objets binaires, s'étendent directement au cas d'objets flous, selon la même méthode que celle décrite dans [4] pour le cas d'objets d'extensions spatiales similaires.

L'extension au cas d'objets tridimensionnels est directe pour certaines définitions, mais demande encore à être précisée pour d'autres. En particulier, les approches qui considèrent les composantes connexes de part et d'autre de β ne peuvent plus être appliquées directement. Il sera intéressant également de distinguer les cas où les objets étendus sont de nature plutôt linéique (tels que des vaisseaux sanguins en imagerie médicale) ou plutôt surfacique (tels que le plan inter-hémisphérique en imagerie cérébrale).

De nombreuses applications sont envisagées pour exploiter les notions proposées, dès que l'agencement spatial des objets est un élément d'information ou de connaissance important, que ce soit en reconnaissance structurelle des formes, en indexation, pour la description d'images par le contenu (pour les SIG, le dossier patient en imagerie

médicale, etc.). La relation « entre » devra alors souvent être combinée avec d'autres relations, topologiques (inclusion, adjacence) ou métriques (distances, directions relatives) par exemple [3, 9]. Ces applications seront développées dans nos travaux futurs.

Références

- [1] M. Aiello and J. van Benthem. A Modal Walk Through Space. *Journal of Applied Non Classical Logics*, 12(3-4) :319–364, 2002.
- [2] I. Bloch. Fuzzy Relative Position between Objects in Image Processing : a Morphological Approach. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(7) :657–664, 1999.
- [3] I. Bloch. Fuzzy Spatial Relationships for Image Processing and Interpretation : A Review. *Image and Vision Computing*, 23(2) :89–110, 2005.
- [4] I. Bloch, O. Colliot, and R. Cesar. Modélisation de la relation spatiale « entre » à partir de notions de convexité et de visibilité floue. In *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications LFA'04*, pages 149–156, Nantes, France, nov 2004.
- [5] I. Bloch, O. Colliot, and R. M. Cesar. Mathematical Modeling of the Relationship “Between” Based on Morphological Operators. In *ISMM 2005*, pages 299–308, Paris, France, apr 2005.
- [6] I. Bloch and H. Maître. Fuzzy Mathematical Morphologies : A Comparative Study. *Pattern Recognition*, 28(9) :1341–1387, 1995.
- [7] U. Bodenhofer. Fuzzy “Between” Operators in the Framework of Fuzzy Orderings. In B. Bouchon-Meunier, L. Foulloy, and R. R. Yager, editors, *Intelligent Systems for Information Processing : From Representation to Applications*, pages 59–70. Elsevier, 2003.
- [8] G. Borgefors. Distance Transforms in the Square Grid. In H. Maître, editor, *Progress in Picture Processing, Les Houches, Session LVIII, 1992*, chapter 1.4, pages 46–80. North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [9] O. Colliot, O. Camara, and I. Bloch. Un modèle déformable intégrant des relations spatiales pour la segmentation de structures cérébrales. *Revue I3 - Information, Interaction, Intelligence*, 2005.
- [10] R. Krishnapuram, J. M. Keller, and Y. Ma. Quantitative Analysis of Properties and Spatial Relations of Fuzzy Image Regions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(3) :222–233, 1993.
- [11] Y. Larvor. *Notion de méréogéométrie : description qualitative de propriétés géométriques, du mouvement et de la forme d'objets tridimensionnels*. PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 2004.
- [12] Y. Mathet. *Etude de l'expression en langue de l'espace et du déplacement : analyse linguistique, modélisation cognitive, et leur expérimentation informatique*. PhD thesis, Université de Caen, France, December 2000.

- [13] P. Matsakis and S. Andréfouët. The Fuzzy Line Between Among and Surround. In *FUZZ'IEEE 2002*, pages 1596–1601, 2002.
- [14] K. Miyajima and A. Ralescu. Spatial Organization in 2D Segmented Images : Representation and Recognition of Primitive Spatial Relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 65 :225–236, 1994.
- [15] A. Rosenfeld and R. Klette. Degree of Adjacency or Surroundness. *Pattern Recognition*, 18(2) :169–177, 1985.