

# Exercices sur la morphologie mathématique

Isabelle Bloch

## 1 Propriétés d'opérations morphologiques

Les affirmations suivantes sont elles vraies ou fausses ?

		vraie	fausse
1	l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à la fonction à éroder	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2	l'érosion d'une fonction est croissante par rapport à l'élément structurant	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3	l'érosion d'une image à niveaux de gris bouche des « vallées »	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4	un filtre alterné séquentiel est croissant	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5	un filtre alterné séquentiel est idempotent	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6	un filtre alterné séquentiel est extensif	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7	un ensemble convexe est invariant par fermeture par un élément structurant compact convexe	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8	un ensemble convexe est invariant par ouverture par un élément structurant compact convexe	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9	une érosion de taille 3 suivie d'une érosion de taille 2 est équivalente à une érosion de taille 5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10	une ouverture de taille 3 suivie d'une ouverture de taille 2 est équivalente à une ouverture de taille 5	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

## 2 Morphologie mathématique binaire

### 2.1 Ouverture morphologique

Dessiner l'ouverture de l'ensemble  $X$  de la figure 1 par l'élément structurant  $B$ . Est-ce que le résultat dépend du choix de l'origine de  $B$ ? (indiquée par une croix sur l'élément structurant).

### 2.2 Sélection d'objets

Une image binaire contient des disques de diamètre 5, des disques de diamètre 10, des segments de longueur 5, des segments de longueur 10 et des segments de longueur 15, les segments pouvant avoir des orientations différentes. Quelles sont les opérations qui permettent :

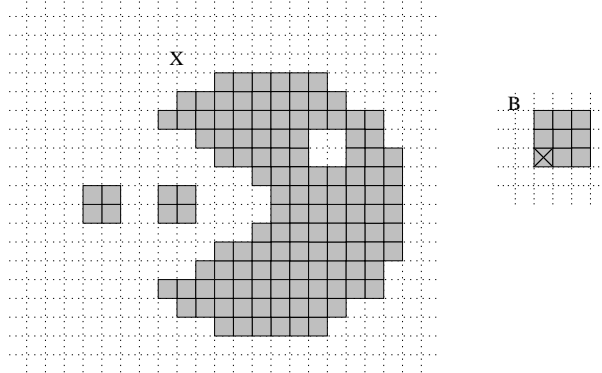


FIGURE 1 – Opérations ensemblistes.

- de supprimer uniquement les disques de diamètre 5 ?
- de supprimer tous les disques (et seulement les disques) ?
- de sélectionner les segments de longueur 15 ?

### 3 Morphologie mathématique à niveaux de gris

La figure 2 présente une fonction  $f$  définie en dimension 1, et un élément structurant  $B$ . Tracer la fonction résultant de la dilatation de  $f$  par  $B$ , son érosion, son ouverture et sa fermeture.

Donner le nombre de minima et maxima régionaux de  $f$ , de l'érodé  $E_B(f)$  de  $f$  par  $B$  et de l'ouverture  $f_B$  de  $f$  par  $B$ , ainsi que le nombre de pics détectés par chapeau haut-de-forme avec cet élément structurant.

Tracer la reconstruction de  $f$  en prenant la fonction  $g$  définie par  $g(x) = \max(0, f(x) - 2)$  comme marqueur. Interpréter le résultat obtenu.

### 4 Relation entre morphologie mathématique binaire et morphologie mathématique à niveaux de gris

Etant donnée une fonction (représentant une image à niveaux de gris) définie sur  $\mathbb{R}^n$ , on peut en déduire une famille d'ensembles binaires appelés sections (ou seuils) de hauteur  $t$ , définis par :

$$f_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq t\}.$$

Etablir la relation entre le dilaté de la section de hauteur  $t$ ,  $D(f_t, B)$ , et la section de hauteur  $t$  du dilaté de  $f$ ,  $D(f, B)_t$ , où  $B$  est un élément structurant binaire quelconque.

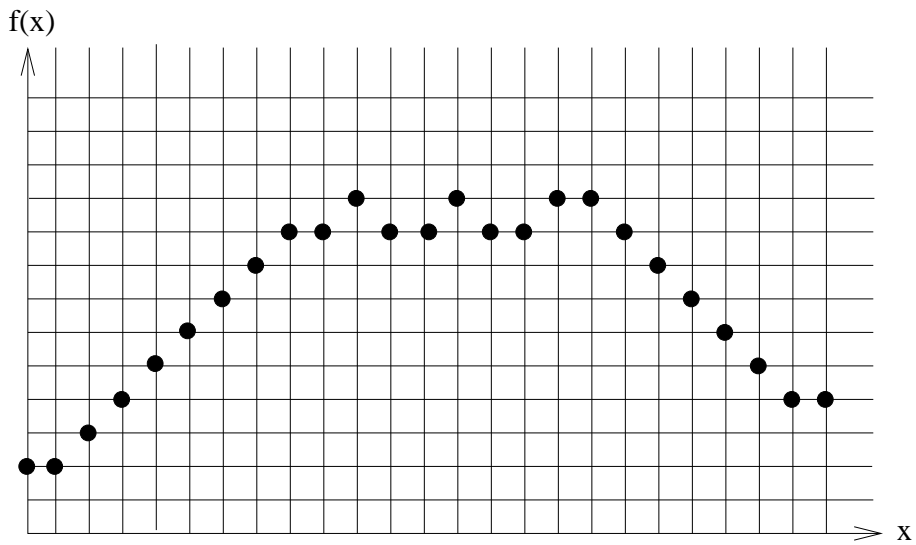
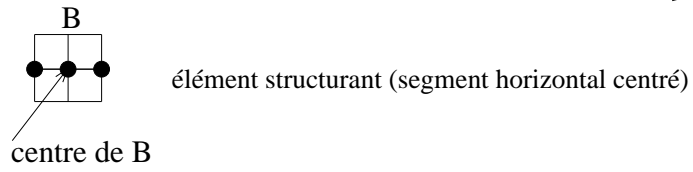
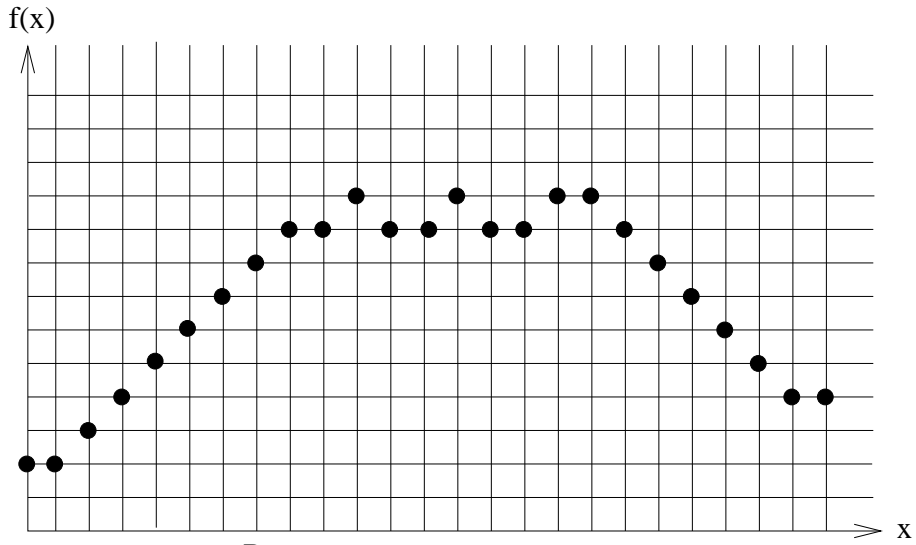
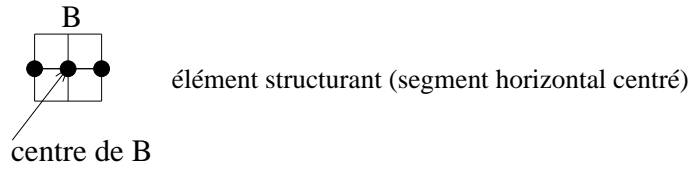


FIGURE 2 – Fonction  $f$ .

## 5 La dilatation commute avec le sup

1. Montrer que la dilatation fonctionnelle commute avec le supremum, c'est-à-dire, pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  et tout ensemble (élément structurant)  $B$ , on a :

$$D(f \vee g, B) = D(f, B) \vee D(g, B)$$

où  $f \vee g$  est défini par  $\forall x, (f \vee g)(x) = \max[f(x), g(x)]$ .

2. Montrer que pour l'infimum, on a l'inégalité :

$$D(f \wedge g, B) \leq D(f, B) \wedge D(g, B).$$

Trouver un contre-exemple simple pour lequel cette inégalité est stricte (l'égalité n'est pas vérifiée).

## 6 Adjonctions et opérateurs algébriques

Soit un treillis  $(\mathcal{T}, \leq)$  ( $\leq$  relation d'ordre partiel, telle que  $\forall (x, y) \in \mathcal{T}, \exists x \vee y$  et  $\exists x \wedge y$  dans  $\mathcal{T}$ ). Le treillis est dit complet si toute famille d'éléments (finie ou non) possède un plus petit majorant et un plus grand minorant.

On appelle dilatation algébrique un opérateur qui commute avec le sup du treillis et érosion algébrique un opérateur qui commute avec l'inf du treillis :

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \delta(\vee_i x_i) = \vee_i \delta(x_i)$$

$$\forall (x_i) \in \mathcal{T}, \varepsilon(\wedge_i x_i) = \wedge_i \varepsilon(x_i)$$

Une paire d'opérateur  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction sur  $(\mathcal{T}, \leq)$  si :

$$\forall (x, y), \delta(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varepsilon(y)$$

1. Montrer que si  $(\varepsilon, \delta)$  est une adjonction, alors pour tous  $x, x', y$  on a  $\delta(x) \vee \delta(x') \leq y \Leftrightarrow \delta(x \vee x') \leq y$ . En déduire que  $\delta$  est une dilatation algébrique. On montre de même que  $\varepsilon$  est une érosion algébrique.
2. Montrer que  $\delta$  est croissante.
3. Montrer que
  - $\varepsilon\delta \geq Id$  et  $\delta\varepsilon \leq Id$  (où  $Id$  désigne la fonction identité sur le treillis),
  - $\varepsilon\delta\varepsilon = \varepsilon$  et  $\delta\varepsilon\delta = \delta$ ,
  - $\varepsilon\delta\varepsilon\delta = \varepsilon\delta$  et  $\delta\varepsilon\delta\varepsilon = \delta\varepsilon$ .

## 7 Ouvertures algébriques

On appelle ouverture algébrique dans un treillis une opération croissante, idempotente et anti-extensive. Soient  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des ouvertures algébriques. Montrer l'équivalence entre :

1.  $\gamma_1 \leq \gamma_2$
2.  $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1 = \gamma_1$
3.  $Inv(\gamma_1) \subseteq Inv(\gamma_2)$  où  $Inv$  désigne le domaine d'invariance.

Indication : on montrera que  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ . On rappelle qu'une ouverture  $\gamma$  s'exprime à partir de son domaine d'invariance par  $\gamma(x) = \bigvee\{y \in Inv(\gamma), y \leq x\}$ .

## 8 Analyse d'une image

Imaginer et décrire le plus précisément possible une méthode de segmentation des cellules de la figure 3 à partir des opérateurs vus en cours. L'algorithme devra fournir une image binaire des cellules et éliminer les petits points sombres.

Comment supprimer les cellules qui touchent le bord de l'image à partir du résultat binaire de segmentation ?

Comment séparer les cellules qui sont connexes ?

Comment sélectionner les cellules qui ont un noyau sombre ?

Comment étudier la distribution de tailles des cellules ?

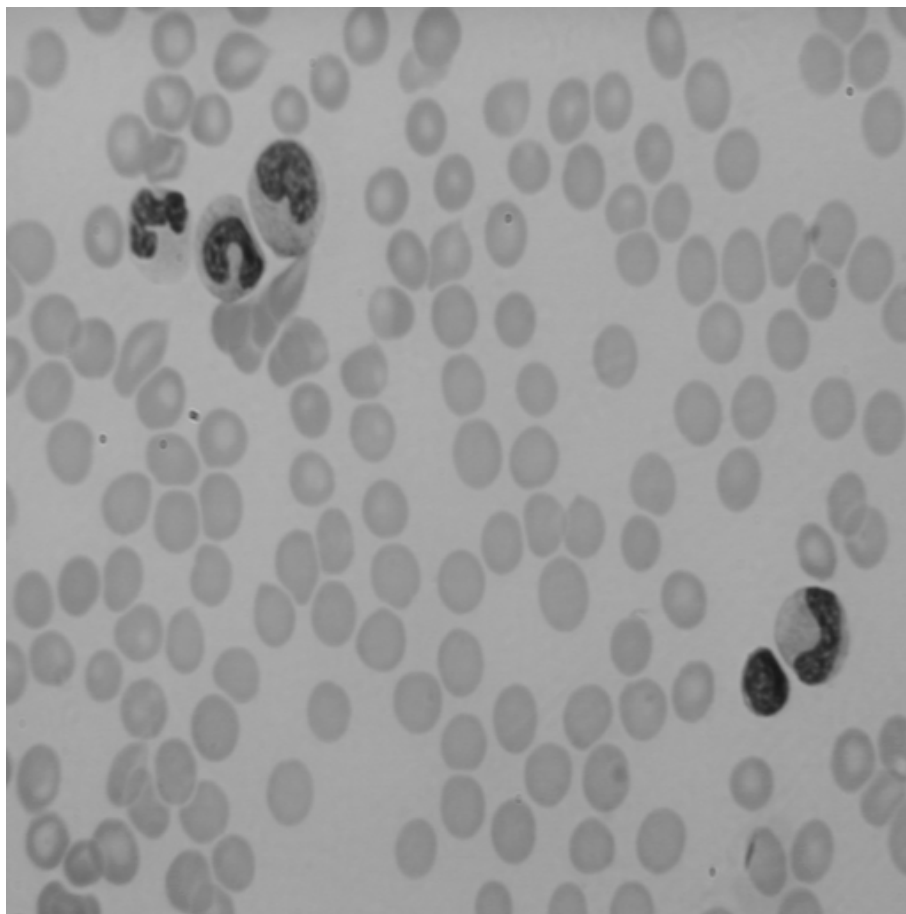


FIGURE 3 – Image de cellules.