Logique et IA symbolique - Exercices

Logics and Symbolic AI - Exercises

1 Logique propositionnelle - *Propositional Logics*

On note $p, q, r...$ les variables du langage propositionnel.
p, q, r denote propositional variables.

1. Montrer que la formule $(p \to (q \vee r)) \vee (p \to q)$ n'est pas une tautologie.
   Prove that the formula $(p \to (q \vee r)) \vee (p \to q)$ is not a tautology.
2. Quelle est la table de vérité de la formule $p \to (q \to p)$? Qu'en déduit-on ?
   What is the truth table of the formula $p \to (q \to p)$? What can we conclude ?
3. Montrer que la formule $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ est une tautologie, en utilisant la méthode par tableau (indication : on peut montrer que la négation de cette formule n'est pas satisfiable).
   Show that the formula $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$ is a tautology, by using the tableau method (indication : show that the negation of this formula is not satisfiable).

2 Logique du premier ordre - *First Order Logic*

1. Ecrire sous forme prenex la formule $\forall x F \to \exists x G$, où x est une variable, et F et G des propriétés.
   Write in prenex form the formula $\forall x F \to \exists x G$, where x is a variable, and F and G are properties.
2. Exprimer en logique du premier ordre (des prédicats) la phrase
   "personne ne fume dans les cafés ni les restaurants".
   Express in first order logic the following sentence
   "nobody smokes in coffeeshops nor restaurants".
3. Donner la négation de la formule obtenue, ainsi que son expression en langage naturel.
   Give the negation of the obtained formula, as well as its expression in natural language.

3 Logique modale - *Modal Logic*

3.1 Quelques théorèmes et règles d'inférence - *Some theorems and inference rules*

On rappelle que dans la logique S5, on a les schémas suivants :
The S5 logic includes the following schemas :

$K \quad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
$T \quad \Box A \to A$
$4 \quad \Box A \to \Box\Box A$
$5 \quad \Diamond A \to \Box\Diamond A$

ainsi que la règle d'inférence de nécessité :
and the necessity inference rule :
$RN : \frac{A}{\Box A}$.

Montrer que :
Prove that :

1. $A \to \Diamond A$ est un théorème of $S5$,
   $A \to \Diamond A$ is a theorem of $S5$,
2. $A \to \Box\Diamond A$ est un théorème $S5$,
   $A \to \Box\Diamond A$ is a theorem of $S5$,
3. $RM : \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ est une règle d'inférence de $S5$.
   $RM : \frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$ is an inference rule of $S5$.

3.2 Logique modale et raisonnement spatial - *Modal Logic and Spatial Reasoning*

On considère une logique modale dont les variables sont notées $p, q...$, munie des connecteurs de la logique propositionnelle et des deux modalités $\Box$ et $\Diamond$. Les mondes possibles, notés $\omega, \omega'...$, représentent des régions de l'espace. Leur ensemble est noté W. On définit une relation d'accessibilité R ayant la signification spatiale suivante : $R(\omega, \omega')$ si et seulement si on peut aller de la région ω à la région ω' (ω' est accessible depuis ω).
We consider a modal logic, with variables $p, q, ...$, the usual connectives of propositional logic and the modalities $\Box$ and $\Diamond$. The possible worlds, $\omega, \omega'...$, represent regions of space. Their set is denoted by W. An accessibility relation R is defined as follows : $R(\omega, \omega')$ iff it is possible to go from region ω to region ω' (ω' is accessible from ω).

On rappelle les relations sémantiques suivantes pour un modèle $\mathcal{M}$:
Let us recall the following semantic relations, for a mode $\mathcal{M}$:

— $\mathcal{M} \models_\omega \Box A$ iff $\forall t \in W$, $\omega R t$ implies $\mathcal{M} \models_t A$
— $\mathcal{M} \models_\omega \Diamond A$ iff $\exists t \in W$, such that $R(\omega, t)$ and $\mathcal{M} \models_t A$

On considère l'exemple de la figure 1, où p, q, r sont des variables, $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (chaque monde étant représenté par un rectangle), $R = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_3, \omega_4), (\omega_1, \omega_4)\}$ (relation d'accessibilité, représentée par les flèches), et la fonction V donnant les mondes dans lesquels une variable est vraie est définie par $V(p) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $V(q) = \{\omega_1\}$, $V(r) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$. On considère le modèle $\mathcal{M} = (W, R, V)$.
Let us consider the example in Figure 1, where p, q, r are variables, $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ (each world being represented as a rectangle), $R = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_2), (\omega_2, \omega_3), (\omega_3, \omega_2), (\omega_3, \omega_4), (\omega_1, \omega_4)\}$ (accessibility relation, represented by the arrows), and function V defining the worlds in which a variable is true : $V(p) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}$, $V(q) = \{\omega_1\}$, $V(r) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$. We consider the model $\mathcal{M} = (W, R, V)$.

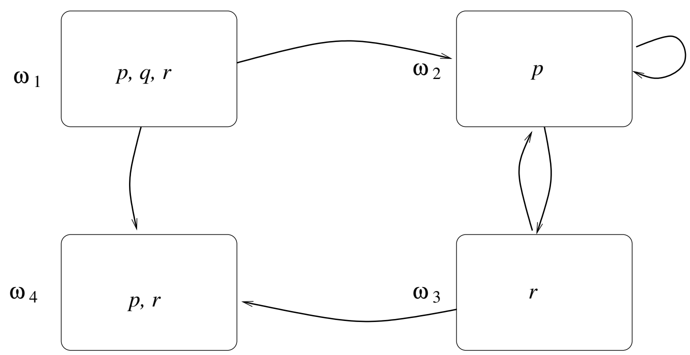

FIGURE 1 – Exemple de relation d'accessibilité – Example of accessibility relation.

1. Expliquer la signification de $\Box$ et $\Diamond$ à partir de leurs définitions sémantiques.
   Explain the meaning of $\Box$ and $\Diamond$ from their semantic definitions.
2. La relation R de l'exemple est-elle réflexive ? symétrique ? transitive ?
   Is R reflexive ? symmetric ? transitive ?
3. Les expressions suivantes sont-elle valides ?
   Are the following expressions valid ?
   — $T : \Box A \rightarrow A$
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_1} \Box p$.
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_1} \Diamond(r \wedge \Box q)$.
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_3} \Box r$.
   — $\mathcal{M} \models_{\omega_3} \Diamond p$.

4 Logique propositionnelle, fusion, révision

On considère un langage propositionnel dont les variables a, b, c, d... représentent des préférences d'individus, et les connecteurs classiques de la logique propositionnelle $\neg$ (négation / non), $\wedge$ (conjonction / et), $\vee$ (disjonction / ou), $\rightarrow$ (implication), $\leftrightarrow$ (double implication). Les préférences peuvent porter sur le choix d'auteurs ou de livres à lire pour un club de lecture, sur le menu d'un repas, etc.
Let us consider a propositional language with variables a, b, c, d..., representing preferences of individuals, and the classical connectives of propositional logic $\neg$ (negation / not), $\wedge$ (conjunction / and), $\vee$ (disjunction / or), $\rightarrow$ (implication), $\leftrightarrow$ (double implication).

Quatre personnes expriment leurs préférences par les formules suivantes :
Four persons express their preferences by the following formulas :
— $\varphi_1 = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee d$
— $\varphi_2 = \neg a \wedge \neg d$
— $\varphi_3 = (b \rightarrow \neg a) \wedge \neg d$
— $\varphi_4 = a \wedge \neg(b \rightarrow a)$

1. Exprimer les préférences de ces quatre personnes en langage naturel, en choisissant

un domaine sur lequel portent les préférences.
Express all these preferences in natural language, by choosing a specific domain for the preferences.

2. Montrer que chacune des formules $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ est satisfiable (pour chaque formule il existe un modèle, c'est-à-dire une instanciation des variables, qui la satisfait).
Prove that $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ are all satisfiable (for each formula there exists a model, i.e. an instantiation of the variables which satisfies the formula).
3. Montrer que φ_4 n'a pas de modèle. Dans la suite, on ne considère plus φ_4.
Prove that φ_4 has no model. In the sequel, φ_4 is excluded.
4. Montrer que $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ est satisfiable en utilisant la méthode par tableau, et en donner un modèle ω.
Prove that $\varphi_1 \wedge \varphi_3$ is satisfiable by using the tableau method, and exhibit a model ω.
5. La conjonction $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ est-elle satisfiable ?
Is the conjunction $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ satisfiable ?
6. Comment la 2e personne pourrait-elle modifier ses préférences pour qu'elles deviennent consistantes avec φ_1 et φ_3 ?
How could the 2nd person modify her preferences to make them consistent with φ_1 and φ_3 ?
7. On considère la distance de Hamming d_H entre deux modèles, définie comme le nombre de variables instanciées différemment dans ces deux modèles. On définit la distance d'un modèle ω à une formule φ par $d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d_H(\omega, \omega')$. Quelle est la distance $d(\omega, \varphi_2)$ où ω est défini par $v(a) = 1, v(b) = 0, v(c) = 1, v(d) = 0$ (v désigne l'instanciation des variables) ?
We consider the Hamming distance d_H between two models, defined as the number of variables instantiated differently in the two models. The distance from a model ω to a formula φ is defined as $d(\omega, \varphi) = \min_{\omega' \models \varphi} d_H(\omega, \omega')$. What is the distance $d(\omega, \varphi_2)$ where ω is defined by $v(a) = 1, v(b) = 0, v(c) = 1, v(d) = 0$ (v denotes the instantiation of the variables) ?
8. Comment peut-on réviser φ_2 par $\varphi_1 \wedge \varphi_3$?
How can φ_2 be revised by $\varphi_1 \wedge \varphi_3$?
9. On apprend une nouvelle information : les préférences pour a doivent être exclues. Que deviennent alors les préférences φ_i des individus ?
A new piece of information becomes available : preferences for a should be excluded. How are then the preferences φ_i modified ?

5 Apprentissage symbolique et règles d'association - *Symbolic Learning and Association Rules*

Des étudiants discutent de ce qu'ils vont faire samedi prochain. Chacun d'eux donne une liste des activités qu'il envisage, dans le tableau suivant. On note : c pour cinéma, d pour dîner avec des amis, e pour révision des examens, l pour lecture, s pour sieste, r pour

randonnée.
Some students discuss about what they will be doing next Saturday. Each of them provides a list of items, in the following table. We note c for cinema, d for dinner with friends, e for studying for the exams, l for reading, s for nap, r for hiking.

Etudiant	Activités du samedi (items)
1	c, d
2	c, d, l, s, r
3	c, d, e, l
4	e, l, s
5	l, r, s
6	l, r, s
7	c, d, r
8	c, d, e

On note $G = \{1, ...8\}$ l'ensemble des étudiants, et $M = \{c, d, e, l, s, r\}$ l'ensemble de toutes les activités possibles (ou items). On cherche à trouver des règles d'association du type $Y_1 \Rightarrow Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont des sous-ensembles de M.
$G = \{1, ...8\}$ denotes the set of students, and $M = \{c, d, e, l, s, r\}$ the set of possible items. We want to find association rules in the form $Y_1 \Rightarrow Y_2$, where Y_1 and Y_2 are subsets of M.

On note $\sigma(Y)$ le nombre d'occurrences de l'ensemble d'items Y, et $S(Y)$ la proportion d'étudiants qui ont choisi Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, où $|G|$ est le cardinal de G). Le support d'une règle $Y_1 \Rightarrow Y_2$ est la proportion d'étudiants ayant choisi à la fois Y_1 et Y_2, et la confiance dans la règle est la proportion d'étudiants ayant choisi à la fois Y_1 et Y_2 parmi ceux qui ont choisi Y_1.
$\sigma(Y)$ denotes the number of occurrences of the set of items Y, and $S(Y)$ the proportion of students who have chosen Y ($S(Y) = \frac{\sigma(Y)}{|G|}$, where $|G|$ is the cardinality of G). The support of a rule $Y_1 \Rightarrow Y_2$ is the proportion of students who have chosen both Y_1 and Y_2, and the confidence in the rule is the proportion of students who have chosen both Y_1 and Y_2 among those who have chosen Y_1.

1. Montrer que $\forall Y_1 \subseteq M, \forall Y_2 \subseteq M, Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow S(Y_1) \geq S(Y_2)$. Qu'en déduit-on pour calculer des ensembles fréquents d'items ?
   Prove that $\forall Y_1 \subseteq M, \forall Y_2 \subseteq M, Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow S(Y_1) \geq S(Y_2)$. What can we derive from this result to compute frequent itemsets ?
2. Déterminer tous les ensembles fréquents d'items, où Y est dit fréquent si $S(Y) \geq 3/8$.
   Establish all the frequent itemsets, Y being frequent if $S(Y) \geq 3/8$.
3. Soit la règle $\{c, d\} \Rightarrow \{l\}$. Quel est son support ? Quelle est la confiance dans cette règle ?
   Let us consider the rule $\{c, d\} \Rightarrow \{l\}$. What is its support ? What is the confidence in this rule ?

6 Apprentissage symbolique et analyse formelle de concepts - *Symbolic Learning and Formal Concept Analysis*

On considère des lieux possibles de vacances en hiver x_1 = île des Caraïbes, x_2 = Alpes, x_3 = Berlin, qui constituent les objets d'un contexte formel, dont l'ensemble est noté G. Ces objets sont caractérisés par des attributs y_1 = mer ou lac, y_2 = soleil, y_3 = neige, y_4 = altitude, y_5 = musées, dont l'ensemble est noté M. Le contexte formel est défini par la table suivante (relation I) :
Potential winter vacation locations are proposed : x_1 = Caraibes, x_2 = Alps, x_3 = Berlin, which are the objects of a formal context (set G). These objects are characterized by attributes y_1=see or lake, y_2=sun, y_3 = snow, y_4 = altitude, y_5 = museums, whose set is M. The formal context is defined by the following table (relation I) :

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x_1	×	×			
x_2	×	×	×	×	
x_3		×	×		×

On rappelle que pour un sous-ensemble d'objets X de G et un sous-ensemble d'attributs Y de M, on définit les deux opérateurs de dérivation :
Let us recall the definition of the derivation operators in formal concept analysis, for any subset X of G and any subset Y of M :

$$\alpha(X) = \{m \in M \mid \forall g \in X, (g, m) \in I\}$$

$$\beta(Y) = \{g \in G \mid \forall m \in Y, (g, m) \in I\}$$

et (X, Y) est un concept formel si et seulement si $\alpha(X) = Y$ et $\beta(Y) = X$.
and (X, Y) is a formal concept iff $\alpha(X) = Y$ and $\beta(Y) = X$.

On rappelle également que α et β forment une connexion de Galois :
α and β are a Galois connection :

$$\forall X \subseteq G, \forall Y \subseteq M, Y \subseteq \alpha(X) \Leftrightarrow X \subseteq \beta(Y) \tag{1}$$

1. Calculer $\alpha(\{x_1\})$, $\beta(\alpha(\{x_1\}))$ et $\alpha(\beta(\alpha(\{x_1\})))$. En déduire que $(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})$ est un concept formel.
   Compute $\alpha(\{x_1\})$, $\beta(\alpha(\{x_1\}))$ and $\alpha(\beta(\alpha(\{x_1\})))$. Derive that $(\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\})$ is a formal concept.
2. Déterminer tous les concepts formels et tracer le treillis de concepts correspondant.
   Compute all the formal concepts of the context (G, M, I). Draw the corresponding concept lattice.
3. Montrer, à partir de la définition de α que $\forall X \subseteq G, \forall X' \subseteq G,\ X \subseteq X' \Rightarrow \alpha(X') \subseteq \alpha(X)$.
   Show, from the definition of α, that $\forall X \subseteq G, \forall X' \subseteq G,\ X \subseteq X' \Rightarrow \alpha(X') \subseteq \alpha(X)$.

4. Montrer que $\forall X \subseteq G$, $X \subseteq \beta(\alpha(X))$. Indication : on pourra utiliser le fait que $\alpha(X) \subseteq \alpha(X)$ et l'équation 1.
   Show that $\forall X \subseteq G$, $X \subseteq \beta(\alpha(X))$. Indication : use the fact that $\alpha(X) \subseteq \alpha(X)$ and Equation 1.
5. Montrer que $\alpha\beta\alpha = \alpha$.
   Show that $\alpha\beta\alpha = \alpha$.
6. Dans le treillis de concepts, la conjonction entre deux concepts (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) est définie par :
   In the concept lattice, the conjunction between two concepts (X_1, Y_1) and (X_2, Y_2) is defined as :
   $$(X, Y) = \big(X_1 \cap X_2, \alpha\big(\beta(Y_1 \cup Y_2)\big)\big)$$
   Montrer que (X, Y) est bien un concept formel.
   Show that (X, Y) is a formal concept.
7. Les implications d'attributs suivantes sont elles valides ?
   Are the following attribute implications valid ?
   — $\{y_1\} \Rightarrow \{y_2\}$
   — $\{y_2, y_3\} \Rightarrow \{y_4\}$
8. Quelle est la différence entre les règles d'association et les implications d'attributs ?
   What is the difference between association rules and attribute implications ?

7 Apprentissage symbolique et arbres de décision - *Symbolic Learning and Decision Trees*

Dans l'hypothèse où il est possible d'aller au restaurant le soir, on s'intéresse à la décision d'attendre ou pas, en fonction de plusieurs attributs du restaurant. La table 1 donne des exemples d'apprentissage.
Assuming that it is possible to go out for dinner at night, we consider the decision to wait or not, depending on several attributes of the restaurant. Table 1 describes learning examples.

1. Construire deux arbres de décision à partir des exemples d'apprentissage de cette table, en considérant les attributs dans des ordres différents. Observations ?
   Build two different decision trees from the learning examples in this table, by considering attributes in different orders. What do you observe ?
2. Pourquoi est-ce que Occ (places occupées) est-il un bon attribut ?
   Why is Occ (occupied places) a good attribute ?
3. Si l'arbre est construit en considérant d'abord l'attribut Occ puis l'attribut Time, est-ce que Hun et Alt sont des bons attributs à considérer ensuite ?
   If the tree is build by considering first attribute Occ and then attribute Time, are Hun and Alt good attributes to consider next ?
4. On veut prendre une décision pour un nouvel exemple x_{11} défini ci-dessous. Est-ce possible à partir d'un des arbres construit ? Comment pourrait-on faire ?

Example	Alt	Bar	Hun	Occ	Rain	Time	Decision
x_1	Yes	No	Yes	Some	No	0-10	yes
x_2	Yes	No	Yes	Full	No	30-60	no
x_3	No	Yes	No	Some	No	0-10	yes
x_4	Yes	No	Yes	Full	Yes	10-30	yes
x_5	Yes	No	No	Full	No	> 60	no
x_6	No	Yes	Yes	Some	Yes	0-10	yes
x_7	No	No	Yes	Some	Yes	0-10	yes
x_8	No	Yes	No	Full	Yes	> 60	no
x_9	Yes	Yes	Yes	Full	No	10-30	no
x_{10}	Yes	Yes	Yes	Full	No	30-60	yes

Table 1 – Learning examples. Attributes are :
Alt = is there an alternative ?
Bar = is there a bar where it is possible to wait ?
Hun = hungry ?
Occ = occupied places
Rain = is it raining ?
Time = estimated time to wait to be seated
Decision = will wait ?

A decision has now to be made for a new example x_{11}, defined next. Is it possible from one of the decision trees ? How could a decision be made ?

x_{11}	Alt = Yes	Bar = Yes	Hun = No	Occ = Full	Rain = No	Time = 20	?

8 Méréotologie, relations RCC - *Mereotology, RCC relations*

Les relations RCC-8 sont données dans le tableau suivant en logique du premier ordre (x, y... désignent des régions (abstraites) de l'espace et C un prédicat de connexion). Ici P peut être interprété simplement comme l'inclusion ensembliste classique.
RCC-8 relations are given in the following table, in first order logic (x, y... are abstract regions of space and C is a connection predicate). Here P can be simply interpreted as the classical set inclusion.

$DC(x,y)$	x is disconnected from y	$\neg C(x,y)$
$P(x,y)$	x is a part of y	$\forall z, C(z,x) \rightarrow C(z,y)$
$PP(x,y)$	x is a proper part of y	$P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$
$EQ(x,y)$	x is identical with y	$P(x,y) \wedge P(y,x)$
$O(x,y)$	x overlaps y	$\exists z, P(z,x) \wedge P(z,y)$
$DR(x,y)$	x is discrete from y	$\neg O(x,y)$
$PO(x,y)$	x partially overlaps y	$O(x,y) \wedge \neg P(x,y) \wedge \neg P(y,x)$
$EC(x,y)$	x is externally connected to y	$C(x,y) \wedge \neg O(x,y)$
$TPP(x,y)$	x is a tangential proper part of y	$PP(x,y) \wedge \exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)$
$NTPP(x,y)$	x is a non tangential proper part of y	$PP(x,y) \wedge \neg \exists z[EC(z,x) \wedge EC(z,y)]$

1. Soit la formule $PP(x,y) \wedge O(z,y) \wedge DC(x,z) \wedge TPP(t,y) \wedge EC(t,x)$. Montrer que cette formule a un modèle, c'est-à-dire qu'il existe une configuration spatiale de régions (dans le plan) qui la satisfait.
   Let us consider the formula $PP(x,y) \wedge O(z,y) \wedge DC(x,z) \wedge TPP(t,y) \wedge EC(t,x)$. Show that this formula as a model, i.e. a concrete spatial configurations of regions (in the plane) that satisfies the formula.

2. Montrer que les relations PP et PO sont incompatibles. On montrera que la formule $PP(x,y) \wedge PO(x,y)$ est non satisfiable.
   Prove that relations PP and PO are incompatible. To this end, prove that the formula $PP(x,y) \wedge PO(x,y)$ is not satisfiable.