

Segmentation par modèles déformables

Isabelle Bloch

LTCI, Télécom Paris - Sorbonne Université, CNRS, LIP6

<http://www.perso.telecom-paris.fr/bloch>

Introduction

Modèles déformables : évolution d'un modèle initial en minimisant une énergie pour

- trouver une partition de l'image en régions homogènes,
- trouver les contours d'un objet.

Représentation :

- paramétrique,
- implicite, par ensembles de niveau.

Critères :

- Image :
 - contours,
 - homogénéité des régions.
- Autres contraintes :
 - internes : régularité,
 - externes : force de ballon, relations spatiales, géométrie...

- Premiers travaux : Kass, Witkins et Terzopoulos en 1987.
- Principe : évolution d'une courbe sous l'effet de forces internes et externes (un objet, modèle paramétrique)

$$v(s) = [x(s), y(s)]^t \quad s \in [0, 1]$$

- Energie : $E_{totale} = \int_0^1 (E_{interne}(v(s)) + E_{image}(v(s)) + E_{ext}(v(s))) ds$
- Energie interne : régularisation

$$E_{interne} = \alpha(s) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \beta(s) \left(\frac{d^2v}{ds^2} \right)^2$$

contrôle de la tension et de la courbure ou élasticité (si s = abscisse curviligne, tangente $T = \frac{dv}{ds}$, $\|T\| = 1$, et $\frac{dT}{ds} = kN$, k courbure).

- Energie de l'image (gradient, information de contour) :

$$E_{image} = g(\|\nabla f\|)$$

- Energie externe : beaucoup de possibilités.

- Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial E}{\partial v'} \right) + \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{\partial E}{\partial v''} \right) = 0$$

⇒ problème variationnel

$$-(\alpha v')'(s) + (\beta v'')''(s) + \nabla P(v) = 0$$

$$P(v) = E_{image}(v) + E_{ext}(v) \quad F(v) = -\nabla P(v)$$

+ conditions aux limites.

- Discrétisation par les différences finies

$$V^t = [v_0^t, v_1^t, v_2^t, \dots, v_{n-1}^t]^t$$

$$\frac{\beta}{h^2} v_{i+2} - \left(\frac{\alpha}{h} + 4 \frac{\beta}{h^2} \right) v_{i+1} + \left(\frac{2\alpha}{h} + 4 \frac{6\beta}{h^2} \right) v_i - \left(\frac{\alpha}{h} + 4 \frac{\beta}{h^2} \right) v_{i-1} + \frac{\beta}{h^2} v_{i-2} = F(v_i)$$

$$AV = F$$

A : matrice pentadiagonale

Résolution (schéma dynamique avec inertie)

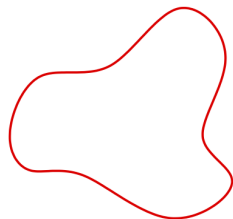
- Evolution de la courbe dans le temps :

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha v'' + \beta v'''' + F(v)$$

$$v(t+1) = (A + \tau I)^{-1} (F(v(t)) + \tau v(t))$$

- initialisation (conditionne la convergence)
- choix de τ (inertie, régularise A)
- inversion matricielle (circulante, Töplitz ou non)
- pas de discrétisation constant
- critère d'arrêt

Types de contours actifs et matrices associées

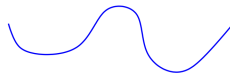


Contour actif fermé : matrice circulante

$$\begin{bmatrix} 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & 0 & \beta & -\alpha-4\beta \\ -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots \\ \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & \dots & \dots \\ 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -\alpha-4\beta & \beta & 0 & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta \end{bmatrix}$$

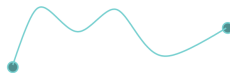
Contour actif ouvert à extrémités libres

$$\begin{bmatrix}
 \beta & -2\beta & \beta & 0 & 0 & \vartheta & \Omega \\
 -\alpha-2\beta & 2\alpha+5\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \\
 \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & & \\
 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & & \\
 0 & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & & \\
 \dots & \dots & \dots & & & & \\
 & & & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+5\beta & -\alpha-2\beta \\
 0 & 0 & 0 & & \beta & -2\beta & \beta
 \end{bmatrix}$$



Contour actif ouvert à extrémités fixes

$$\begin{bmatrix}
 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & 0 & \dots & \dots \\
 \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \beta & \dots & \dots \\
 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & -\alpha-4\beta & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \beta & -\alpha-4\beta & 2\alpha+6\beta & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \beta & -2\beta & \dots & \dots
 \end{bmatrix}$$



Un exemple

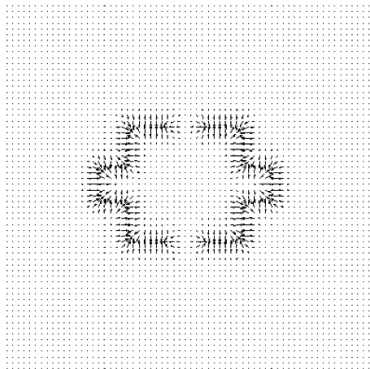
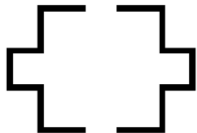


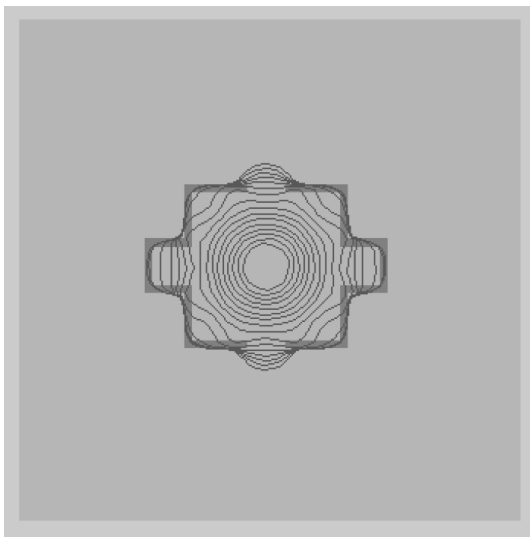
Exemple d'évolution

Evolution

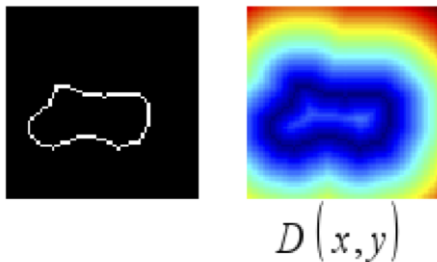
Force de Ballon (Cohen, 1991)

- Problème :
 - si mauvaise initialisation : pas d'attraction,
 - si pas de forces : rétraction de la courbe.
- Force de pression (ballon) : $k_1 N(s)$
($N(s)$ vecteur normal unitaire en s).
- Initialisation : intérieur ou extérieur de l'objet (ne nécessite plus d'être près du contour recherché).
- Remarque : la force $F(v(s)) = k_1 N(s) - k \frac{\nabla P}{\|\nabla P\|}$ ne dérive plus d'un potentiel.





Contrainte de distance



Carte de distance $D(x, y) \Rightarrow$ potentiel

$$P_{dist}(x, y) = we^{-D(x, y)}$$

$$F_{ext} = -\nabla P_{dist}$$

Diffusion du gradient (*Gradient vector flow*) (Xu et Prince, 1997)

- Objectifs :
 - s'affranchir de l'initialisation,
 - convergence vers des régions concaves.
- Diffusion des gradients dans toute l'image.
- Pour $\vec{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, minimisation de la fonctionnelle :

$$E = \int \int \mu(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) + |\nabla f(x, y)|^2 |\vec{V} - \nabla f(x, y)|^2 dx dy$$

- f = carte de contours.
- Initialisation qui traverse les contours possible.

GVF : résolution et généralisation

$$\mu \nabla^2 u - (u - f_x)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

$$\mu \nabla^2 v - (v - f_y)(f_x^2 + f_y^2) = 0$$

Formulation plus générale :

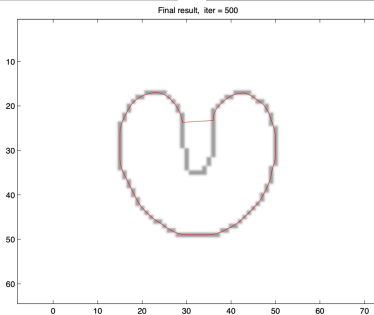
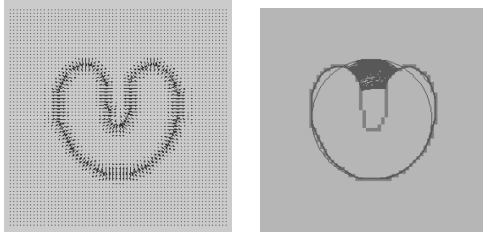
$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(\|\nabla f\|) \nabla^2 v - h(\|\nabla f\|)(v - \nabla f)$$

$$v(x, y, 0) = \nabla f(x, y)$$

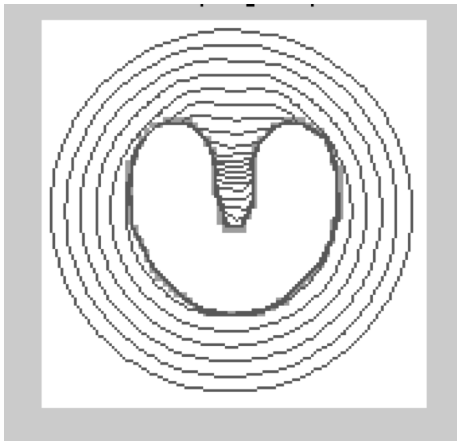
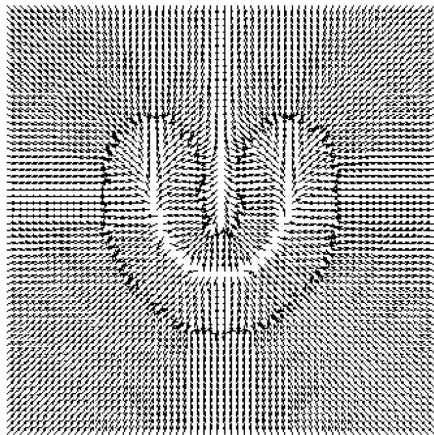
Exemples de fonctions g et h :

- $g(r) = \mu, h(r) = r^2$
- $g(r) = \exp\left(\frac{-r^2}{k}\right), h(r) = 1 - g(r)$

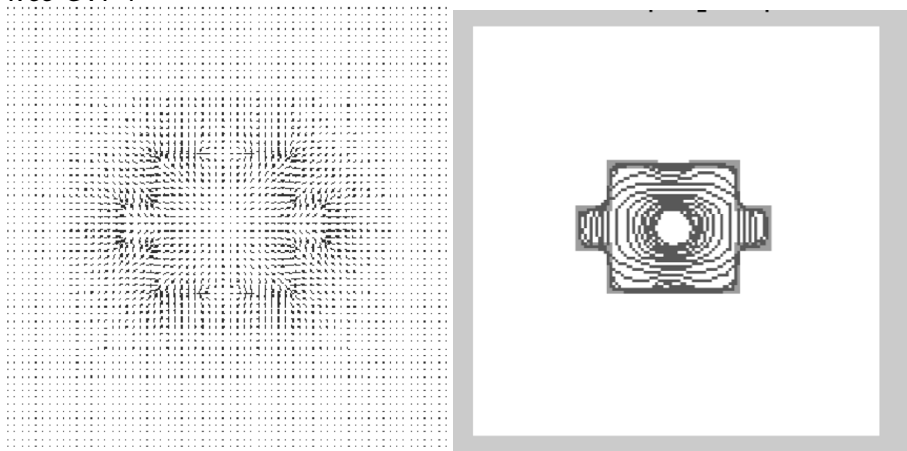
Contour actif classique : exemple de problème



Avec GVF :



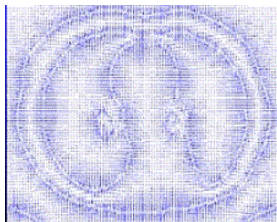
Avec GVF :



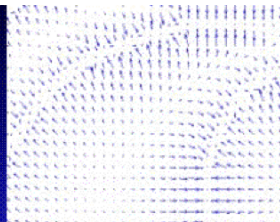
GVF : exemple d'évolution

Evolution

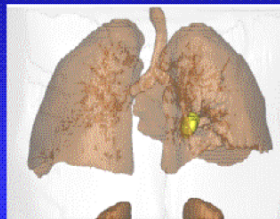
GVF : exemple en imagerie médicale

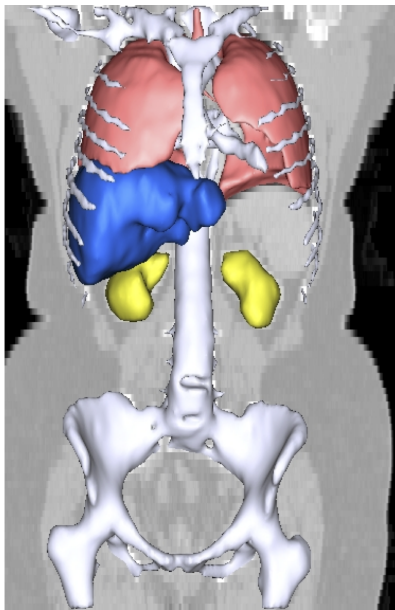


GVF field



GVF field. Detail.





■ Segmentation avec régularisation :

- fidélité aux données
- lissage de la surface

■ Minimisation d'une énergie :

$$\begin{aligned} E(v) = & \int_{\Omega} w_{10} \left\| \frac{\partial v}{\partial r} \right\|^2 + w_{01} \left\| \frac{\partial v}{\partial s} \right\|^2 \\ & + w_{20} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right\|^2 + w_{02} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \right\|^2 + 2w_{11} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} \right\|^2 dr ds \\ & + \int_{\Omega} P(v) dr ds \end{aligned}$$

- premier ordre : membrane élastique (courbure)
- second ordre : plaque mince (torsion)
- P : potentiel d'attraction

Quelques autres modèles paramétriques

- B-splines
- superquadriques
- hyperquadriques
- ...

⇒ Contrainte géométrique et régularisation implicites.

■ Principe

$$J_1(v) = \alpha \int_a^b |v'(s)|^2 ds + \lambda \int_a^b g(|\nabla I(v(s))|)^2 ds$$

$$\text{minimisation de } J_2(v) = 2\sqrt{\lambda\alpha} \int_a^b |v'(s)|g(|\nabla I(v(s))|) ds$$

⇒ calcul de géodésiques selon une nouvelle métrique (induite par l'image).

■ Equation d'évolution

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(I)\kappa N - (\nabla g \cdot N)N$$

Contours actifs géodésiques : exemple

Evolution

Ensembles de niveaux (level sets)

Représentation implicite, sans paramétrisation.

- Principe :

soit $\Gamma(t)$ une hypersurface fermée (dim. $d - 1$)

Soit une fonction ψ (dim. d) à valeurs dans \mathbb{R} avec

$$\Gamma(t) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \psi(x, t) = 0\}$$

propagation de Γ (évolution selon la normale) \Leftrightarrow propagation de ψ

- Exemple : fonction distance

- Equation d'évolution de ψ

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -F \|\nabla \psi\|$$

NB : normale $N = \frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|}$, courbure moyenne $k = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla \psi}{\|\nabla \psi\|}\right)$

Dimension supplémentaire : exemple de la distance



- Vitesse de propagation :

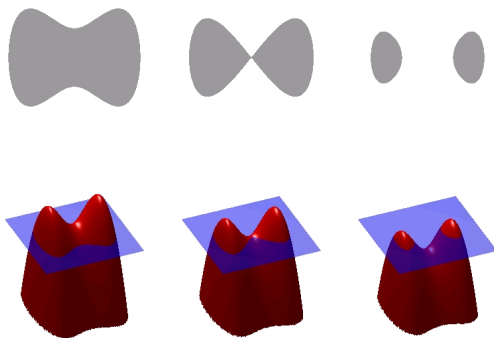
$$F = (F_A + F_G)k_I$$

- F_A expansion ou contraction indépendant de la géométrie,
- F_G propriétés géométriques (courbure),
- k_I critère d'arrêt (image).

$$F = \frac{1}{1 + \|\|\nabla G_\sigma * I\|\|^p} (\pm 1 + \epsilon \kappa)$$

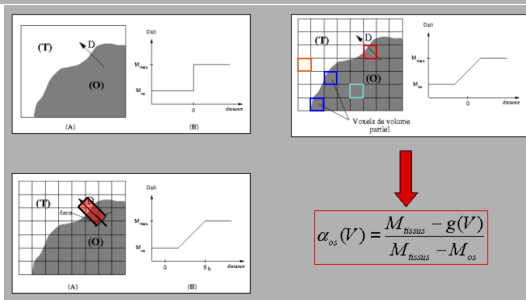
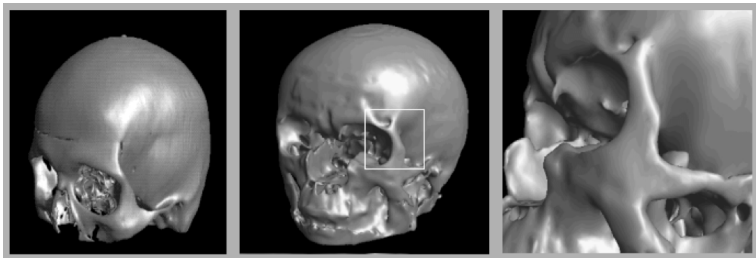
- Intérêt : modification de la topologie.
- Problème : approximation du gradient (boucle).
- Accélération : approximation bande étroite.

Ensembles de niveau et changement de topologie

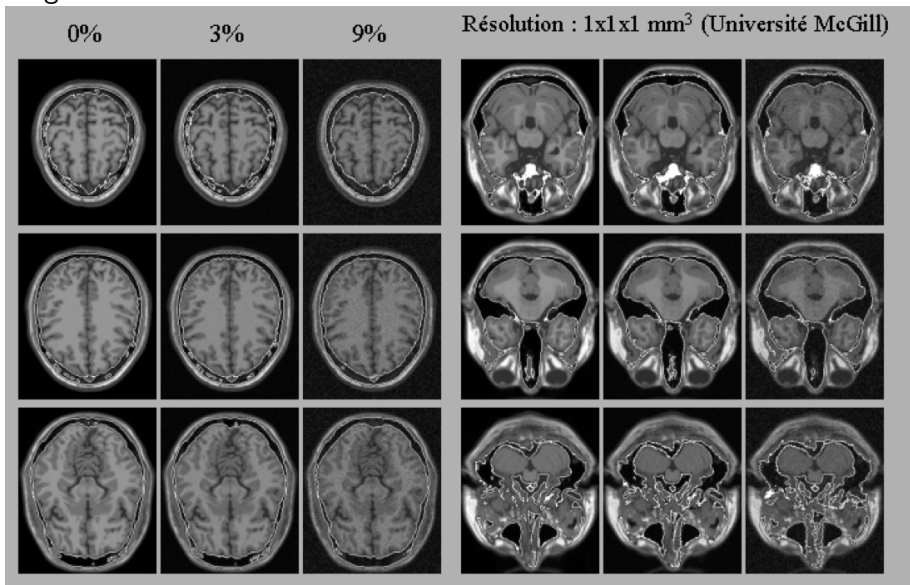


Exemple

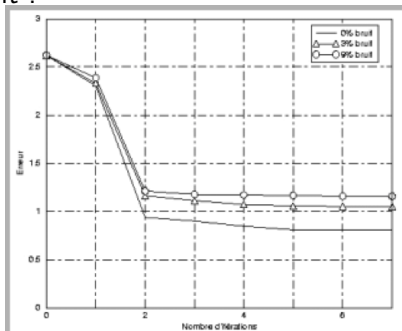
Exemple : segmentation de l'os en IRM (H. Rifai)



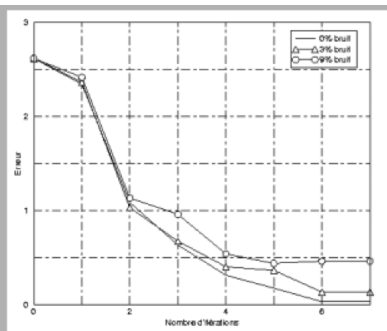
Images simulées :



Erreurs de segmentation sur les images simulées avec divers niveaux de bruit :

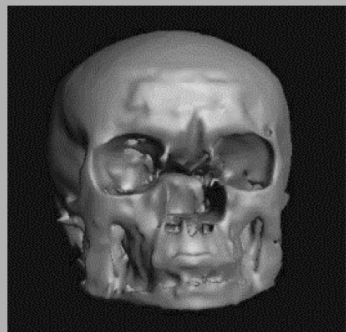
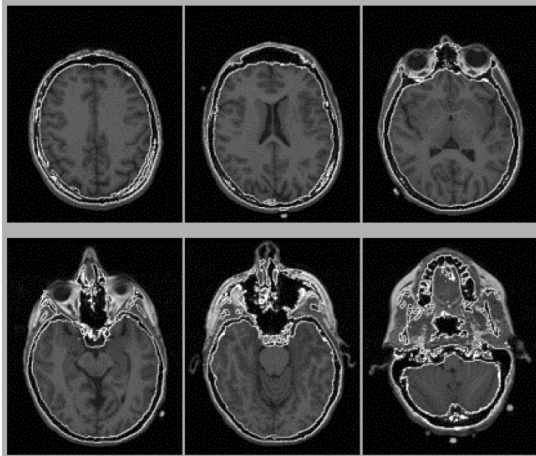


Sans estimation du volume partiel.



Avec estimation du volume partiel.

Images réelles :

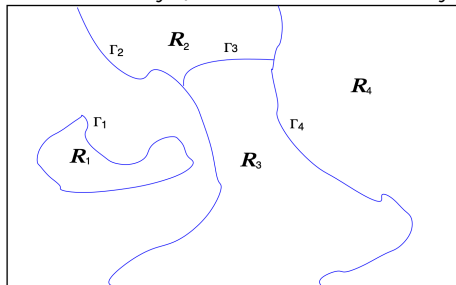


Evolution

Résultat

Approche de Mumford et Shah (1989)

- Image f sur un support \mathcal{I} .
- Approximation par des fonctions régulières $g(x, y)$ sur des régions R_i limitées par des contours Γ_j ($\mathcal{I} = \cup_i R_i \cup \Gamma$, $\Gamma = \cup_j \Gamma_j$):



- Fonctionnelle à minimiser : $U(\Gamma, g, f) =$
 $\lambda \iint_{\mathcal{I} \setminus \Gamma} (f(x, y) - g(x, y))^2 dx dy + \mu \iint_{\mathcal{I} \setminus \Gamma} \|\nabla g(x, y)\|^2 dx dy + \nu \int_{\Gamma} dl$

Approche de Mumford et Shah : cas constant par morceaux

$g_i = \text{constante}$ sur chaque R_i :

$$U_0(\Gamma, f) = \sum_i \lambda_i \iint_{R_i} (f - g_i)^2 dx dy + \nu \int_{\Gamma} dl$$

$$\Rightarrow g_i = \frac{1}{s_i} \iint_{R_i} f(x, y) dx dy$$

où s_i représente la surface de R_i

\Rightarrow Partition de l'espace en régions homogènes, caractérisées par la moyenne de leur niveau de gris.

Formulation avec des ensembles de niveaux

- Contour Γ
- Deux régions $R_1 = \text{int}(\Gamma)$ et $R_2 = \text{ext}(\Gamma)$ de niveau constant g_1 et g_2

$$U(\Gamma, g, f) = \lambda_1 \iint_{R_1} (f - g_1)^2 dx dy + \lambda_2 \iint_{R_2} (f - g_2)^2 dx dy + \nu \int_{\Gamma} dl$$

Ensemble de niveau :

$$\phi(x, y) \begin{cases} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ > 0 & \text{dans } R_1 = \text{int}(\Gamma) \\ < 0 & \text{dans } R_2 = \text{ext}(\Gamma) \end{cases}$$

$$\Gamma(t) = \{\phi(t) = 0\}$$

Evolution :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \quad \phi(0) = \phi_0$$

$$(v(r, s) = (r, s, \Phi(r, s))) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial r} = (1, 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r})^t, \frac{\partial v}{\partial s} = (0, 1, \frac{\partial \Phi}{\partial s})^t, \text{ etc.}$$

$$H(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad H'(z) = \delta(z)$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} dl = \int_{\mathcal{I}} |\nabla H(\phi)| dx dy = \int_{\mathcal{I}} \delta(\phi) |\nabla \phi| dx dy$$

et $U(\Gamma, g, f) =$

$$\lambda_1 \iint_{\mathcal{I}} (f - g_1)^2 H(\phi) dx dy + \lambda_2 \iint_{\mathcal{I}} (f - g_2)^2 (1 - H(\phi)) dx dy + \nu \int_{\mathcal{I}} \delta(\phi) |\nabla \phi| dx dy$$

Minimisation de U :

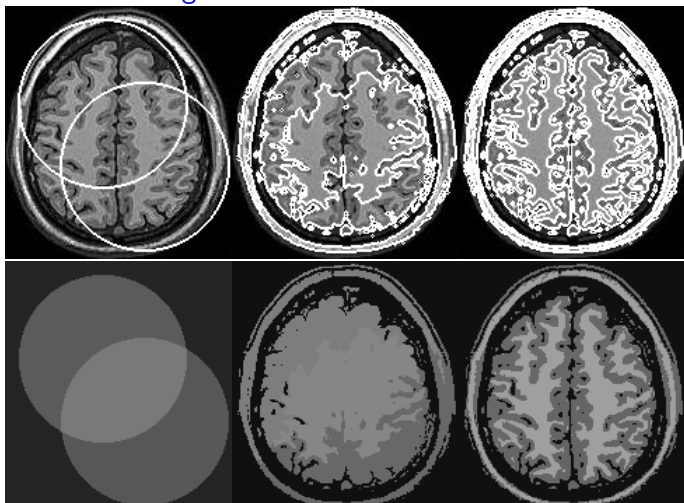
$$g_1 = \frac{\int_{\mathcal{I}} f H(\phi) dx dy}{\int_{\mathcal{I}} H(\phi) dx dy} \quad g_2 = \frac{\int_{\mathcal{I}} f (1 - H(\phi)) dx dy}{\int_{\mathcal{I}} (1 - H(\phi)) dx dy}$$

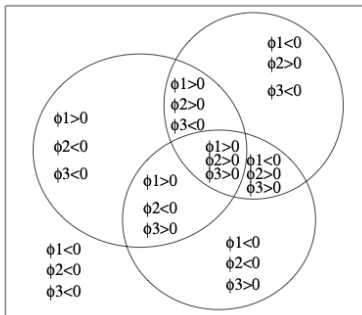
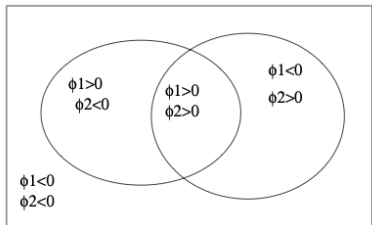
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\phi) \left[\nu \nabla \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \lambda_1 (f - g_1)^2 + \lambda_2 (f - g_2)^2 \right]$$

En pratique : versions "lisses" de δ et H .

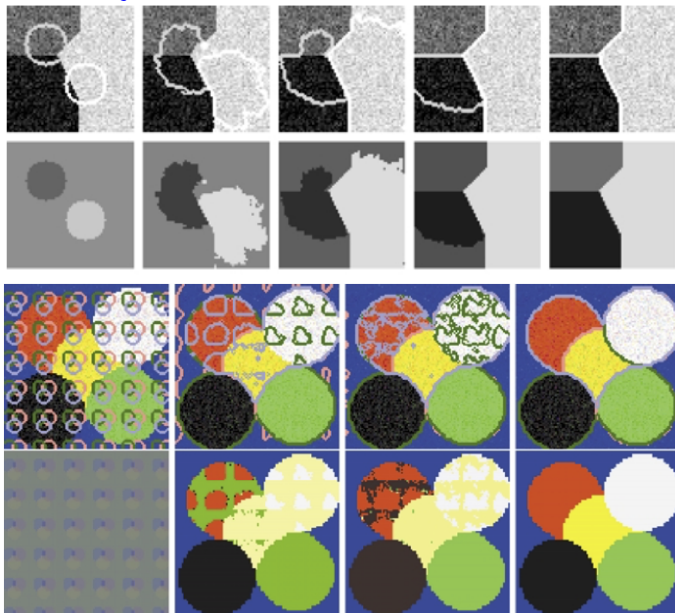
Ensembles de niveaux et modèles multi-phases (Chan, Vese, 2001, 2002)

Segmentation d'une image IRM avec deux ensembles de niveaux





Exemples avec des jonctions

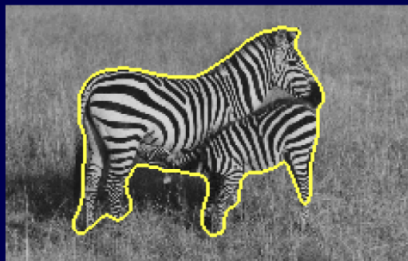


1. Generate sparse texture features by nonlinear diffusion filtering



Brox, Weickert '04, '06

2. Mumford-Shah segmentation of vector-valued features



Brox, Weickert '04, '06

Compétition de régions

Régions caractérisées par leurs distributions d'intensités.

Formulation probabiliste : partition $\mathcal{P}(\Omega) = \{\Omega_e, \Omega_i\}$ maximisant $\rho(I|\mathcal{P}(\Omega))\rho(\mathcal{P}(\Omega))$.

$$\rho(\mathcal{P}(\Omega)) \propto \nu \exp(-\nu|C|), \quad \nu > 0$$

$$\rho(I|\mathcal{P}(\Omega)) = \rho(I|\Omega_e)\rho(I|\Omega_i) = \prod_{x \in \Omega_e} p_e(I(x), \theta_e) \prod_{x \in \Omega_i} p_i(I(x), \theta_i)$$

$$\rho(\mathcal{P}(\Omega)|I) = \nu \exp(-\nu|C|) \prod_{x \in \Omega_e} p_e(I(x), \theta_e) \prod_{x \in \Omega_i} p_i(I(x), \theta_i)$$

Formulation sous forme de minimisation d'énergie :

$$E(\{C, \theta_e, \theta_i\}) = E_{reg}(C) + E_e(\{C, \theta_e\}) + E_i(\{C, \theta_i\})$$

$$\begin{cases} E_{reg}(C) = -\log \nu + \nu|C|, \\ E_e(\{C, \theta_e\}) = -\int_{x \in \Omega_e} \log p_e(I(x), \theta_e) dx \\ E_i(\{C, \theta_i\}) = -\int_{x \in \Omega_i} \log p_i(I(x), \theta_i) dx \end{cases}$$

$\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) > 0$ dans Ω_e , $\phi(x) < 0$ dans Ω_i et $\phi(x) = 0$ sur C .

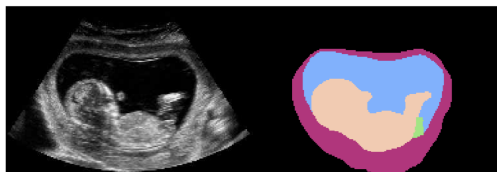
$$E(\phi, \theta_i, \theta_e) = E_{reg}(\phi) + E_e(\phi, \theta_e) + E_i(\phi, \theta_i)$$

$$\begin{cases} E_{reg}(\phi) = \nu \int_{x \in \Omega} \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx, \\ E_e(\phi, \theta_e) = - \int_{x \in \Omega} H(\phi(x)) \log(p_e(I(x), \theta_e)) dx \\ E_i(\phi, \theta_i) = - \int_{x \in \Omega} (1 - H(\phi(x))) \log(p_i(I(x), \theta_i)) dx \end{cases}$$

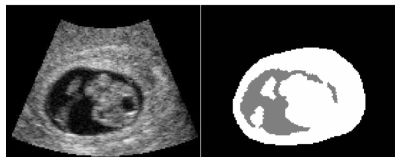
Exemple en imagerie ultrasonore (Jérémie Anquez)



(a)



(b)

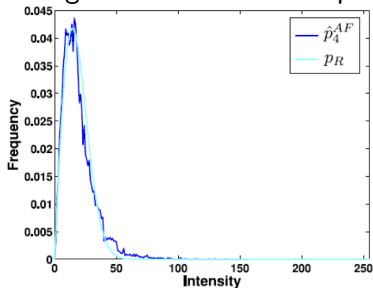


(c)

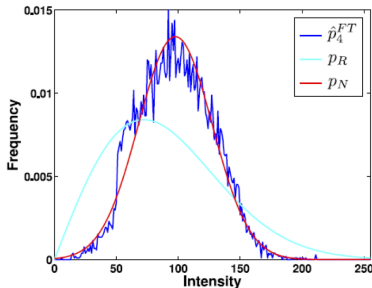


(d)

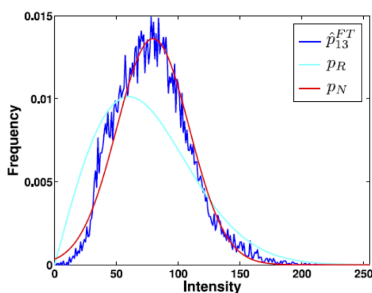
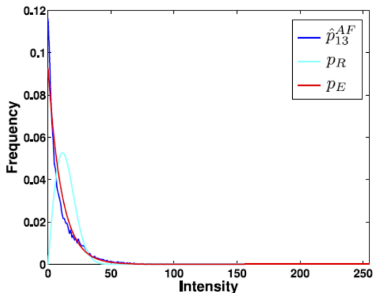
Apprentissage des lois et de leurs paramètres :

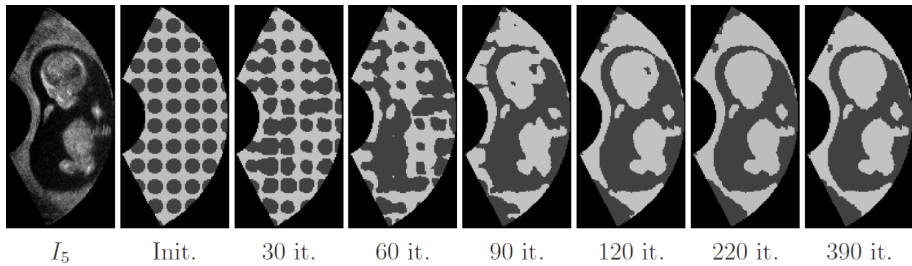


(a)



(b)



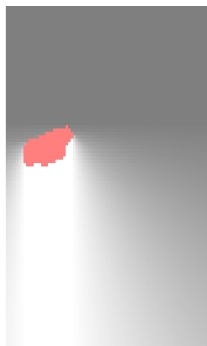


Introduction de relations spatiales dans les modèles déformables (Olivier Colliot)

Exemples

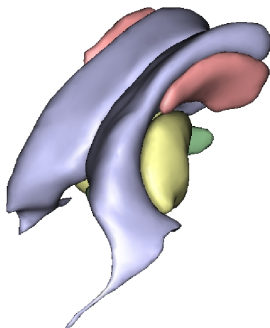


près du ventricule latéral

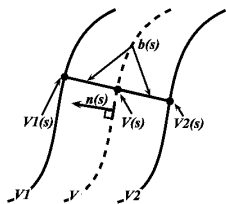


en-dessous du ventricule latéral

⇒ force externe



Imagerie de la rétine (ISEP et XV-XX)



contrainte de parallélisme

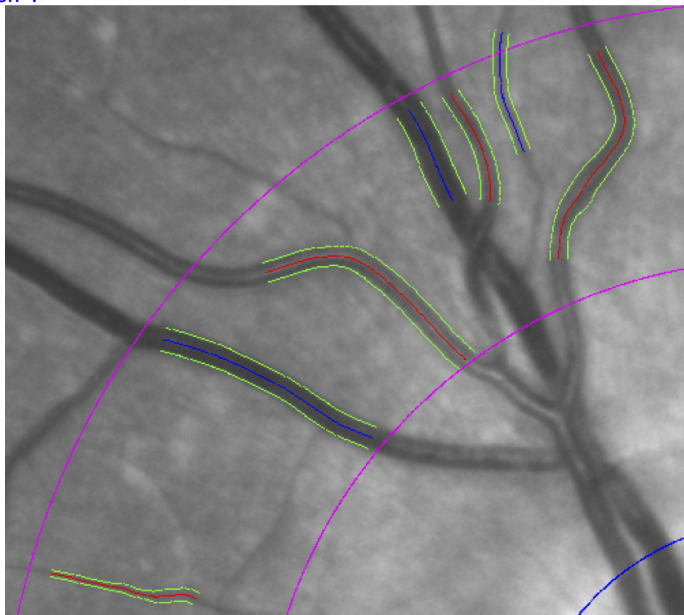
$$E(V, V_1, V_2, b) = E_{Image}(V_1) + E_{Image}(V_2) + E_{Int}(V) + R(V_1, V_2, b)$$

$$E_{Image}(V_i) = \int_0^1 P(V_i(s)) ds = - \int_0^1 |\nabla I(V_i(s))|^2 ds$$

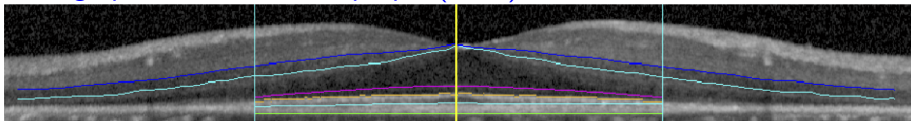
$$E_{Int}(V) = \frac{1}{2} \int \alpha(s) \left| \frac{\partial V(s, t)}{\partial s} \right|^2 + \beta(s) \left| \frac{\partial^2 V(s, t)}{\partial s^2} \right|^2 ds$$

$$R(V_1, V_2, b) = \int_0^1 \varphi(s) (b'(s))^2 ds$$

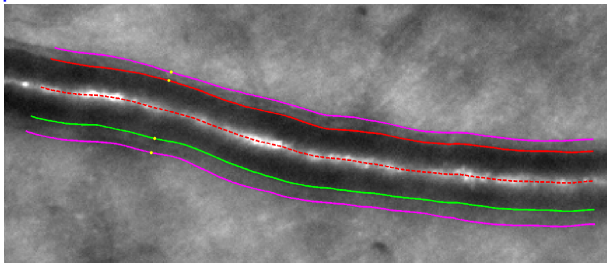
Fond d'œil :



Tomographie de cohérence optique (OCT) :



Optique adaptative :



Scikit-Image - Segmentation

- `skimage.segmentation.active_contour` : représentation paramétrique, méthode par contours.
- `skimage.segmentation.chan_vede` : représentation implicite (par ensemble de niveaux), méthode par régions.

- G. Aubert, P. Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing*. Springer, 2006.
- V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro. Geodesic Active Contours. *International Journal of Computer Vision* 22: 61-79, 1997.
- A. Chambolle. Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 55(3): 827-863, 1995.
- T.F. Chan, L.A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing* 10(2): 266-277, 2001.
- L. Cohen. On Active Contour Models and Balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):211-218, 1991.
- P. Getreuer. Chan-Vese Segmentation. *Image Processing On Line*, 2012. Code : http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-cv/?utm_source=doi
- M. Kass, A. Witkin, D. Terzopoulos. Snakes: Active Contour Models. *International Journal of Computer Vision*, 321-331, 1987.
- D. Mumford, J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5): 577-685, 1989.

- S. Osher, J. Sethian. Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12-49, 1988.
- N. Paragios, R. Deriche. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracking of moving objects. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 22 (3): 266-280, 2000.
- L.A. Vese, T.F. Chan. A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model. *International Journal of Computer Vision* 50(3): 271-293, 2002.
- C. Xu, J. Prince. Gradient Vector Flow: A New External Force for Snakes. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 66-71, 1997.